AP 1S — Correction des exercices de Variations fonctions ; loi binomiale ; intervalle de fluctuation ; produit scalaire ; suites

Exercice 1 : $f(x) = 24x^4 + 20x^3 - 18x^2 + 10$ $D_f = [-5 ; 5]$

1°) $f'(x) = 96x^3 + 60x^2 - 36x = \mathbf{x\,(96x^2 + 60x - 36)}$

2°)

x	-5		-1		0		$\frac{3}{8}$		5
x		-		-	0	+		+	
$96x^2 + 60x - 36$		+	0	-		-	0	+	
Signe de $f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
Var f	12060	↘	-4	↗	10	↘	$\frac{4607}{512}$	↗	17060

$\Delta = 17424$

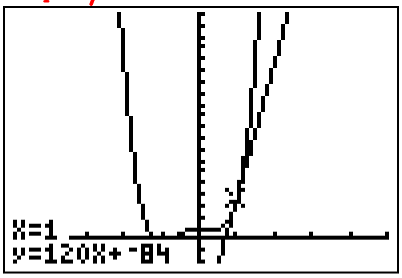
$x_1 = -1$ $x_2 = \frac{3}{8} = 0,375$

$f(\frac{3}{8}) = \frac{4607}{512} \simeq 8,998$

3°) T_1 : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 120(x - 1) + 36 = 120x - 120 + 36 = 120x - 84$

car $f'(1) = 96 + 60 - 36 = 120$ et $f(1) = 24 + 20 - 18 + 10 = 36$

Donc $\mathbf{T_1 : y = 120x - 84}$

4°) 

Exercice 2 : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-1)-1(x^2-3x+6)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-3x+3-x^2+3x-6}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		+	0	-	‖	-	0	+	
$(x-1)^2$		+	0	+	‖	+	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
Var f		↗	-5	↘	‖	↘	3	↗	

$\Delta = 16$

$x_1 = -1$ $x_2 = 3$

2°) L'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées (0 ;f(0)) soit **(0 ;-6)** car f(0) = -6

La courbe C_f ne coupe pas l'axe des abscisses car l'équation $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 6 = 0$ n'a pas de solution car $\Delta = -15$.

3°) Déterminons le signe de $f(x) - (x - 2) = \frac{x^2-3x+6}{x-1} - \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} = \frac{x^2-3x+6-(x^2-x-2x+2)}{x-1} = \frac{4}{x-1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
4		+	‖	+	
$x - 1$		-	‖	+	
Signe de $f(x)-(x-2) = \frac{4}{x-1}$		-	‖	+	

Donc C_f est au-dessus de (Δ) sur $]1 ; +\infty[$ car pour $x > 1$ $f(x) - (x - 2) > 0$ soit $f(x) > (x - 2)$

et C_f est en-dessous de (Δ) sur $]-\infty ; 1[$.

4°) D'après le tableau de variation de f, on en déduit le signe de f(x) :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Var f		↗	-5	↘	‖	↘	3	↗	
Signe de f(x)			**-**		‖		**+**		

Car f a un maximum = -5 négatif — car f a un minimum =3 positif

Exercice 3 : $x \in [3 ; 6]$

1°) Les 3 dimensions du parallélépipède rectangle sont x, x et y, et son volume est 125 cm^3. Donc $x \times x \times$ y = 125

Donc **y = $\frac{125}{x^2}$**

2°) Ce parallélépipède comporte 6 faces : S(x) = 2 × ($x \times x$) + 4 (x × y) = 2 x^2 + 4 x y

Or y = $\frac{125}{x^2}$. Donc S(x) = 2 x^2 + 4 $x\frac{125}{x^2}$ = **2 x^2 + $\frac{500}{x}$**

3°) La fonction S est définie par S(x) = 2 x^2 + $\frac{500}{x}$ pour $x \in [3 ; 6]$.

La fonction S est dérivable sur [3 ; 6].

S'(x) = 4 x - $\frac{500}{x^2}$ = $\frac{4x^3-500}{x^2}$ = $\frac{4(x^3-125)}{x^2}$ = $\mathbf{\frac{4(x-5)(x^2+5x+25)}{x^2}}$

car (x - 5)(x^2+ 5 x + 25) = x^3 + 5 x^2 + 25 x - 5 x^2 - 25 x - 125 = x^3 - 125

x	3		5		6
$4(x-5)$		-	0	+	
x^2 + 5 x + 25		+		+	
x^2		+		+	
Signe de f'(x)		-	0	+	
Var f	$\frac{554}{3}$	↘	150	↗	$\frac{466}{3}$

Δ=-75 donc du signe de a=1

f(3) = $\frac{554}{3} \simeq$ 184,67

f(5) =150

f(6) = $\frac{466}{3} \simeq$ 155,33

D'après ce tableau de variation, **l'aire totale est minimale pour x = 5 cm et cette aire minimale vaut 150 cm^3.**

Exercice 4 : f(x) = $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. D_f = [0 ; +∞[

1°) A la calculatrice, on peut conjecturer que la fonction f est décroissante sur [0 ; + ∞[.

2°) a) La fonction racine carrée est dérivable sur]0 ; + ∞[, donc f est dérivable sur]0 ; + ∞[.

b) Pour tout x de]0 ; + ∞[, f'(x) = $\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}$ = $\frac{\frac{-1}{\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$ = $\mathbf{\frac{-1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}}$

c) Cette dérivée est négative car -1 < 0, $\sqrt{x}$ > 0 et un carré est toujours positif (pour tout x de]0 ; +∞[)

Donc la fonction **f est décroissante sur [0 ; +∞[.**

Exercice 5 :

1°) On considère l'épreuve de Bernoulli : 1 personne appelle pour commander :

- soit la pizza est livrée hors délai : « succès » de probabilité 0,1
- soit la pizza est livrée dans les délais : « échec » de probabilité 1-0,1 = 0,9.

On répète 12 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X, qui compte le nombre de clients livrés hors délai, suit la loi binomiale de paramètres n = 12 et p = 0,1 soit **B(12 ;0,1).**

2°a) C'est p(X = 3) ≃ **0,085** à 10^{-3} près la calculatrice ou p(X = 3) = $\binom{12}{3}0{,}1^3 \times 0{,}9^9 \simeq 0{,}085$

b) p(X ≥ 3) = 1 – p(X ≤ 2) ≃ **0,111** à 10^{-3} près la calculatrice

c) $p(X < 5) = p(X \leq 4) \simeq$ **0,996** à 10^{-3} près la calculatrice
d) $p(5 \leq X \leq 9) = p(X \leq 9) - p(X \leq 4) \simeq$ **0,004** à 10^{-3} près la calculatrice .

<u>Exercice 6</u> :
X suit la loi binomiale B(350 ;0,02) (explication idem que dans l'ex 5)
A la calculatrice, le plus petit entier a tel que $p(X \leq a) > 0,025$ est a = 2
Et le plus petit entier b tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$ est b = 13.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est I = $\left[\frac{a}{n} \; ; \; \frac{b}{n}\right] = \left[\frac{2}{350} \; ; \; \frac{13}{350}\right]$ soit environ [0,0057 ; 0,0372]
Or dans l'échantillon : $f = \frac{10}{350} = \frac{1}{35} \simeq 0,0286$. **$f \in I$, au seuil de 95% on peut affirmer que l'échantillon est représentatif de la population.**
Donc on peut bien dire que la probabilité pour un sportif pris au hasard d'être déclaré positif au contrôle antidopage est égale à 0,02, au seuil de 95%.

<u>Exercice 7</u> :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ car B est le projeté orthogonal de C sur (AB) .
$= AB^2$ (2 vecteurs colinéaires de même sens)
$= 4^2 =$ **16**

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BF} = BA \,.\, BF \,.\, \cos(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BF}) = 4 \times 4 \times \cos\frac{\pi}{3} = 16 \times \frac{1}{2} =$ **8**

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CE} =$ **0** car $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF} = -AB\ AF\cos\frac{\pi}{3} =$ **- 8**

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}).\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CE} = 0 - AB \,.\, CE$ car $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires de sens opposé.
$= -4 \times 3 =$ **-12**

$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EC} = -3 \times 3 =$ **−9** ou $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{EB} = -EC\ EB\cos\frac{\pi}{4} = -3 \times \sqrt{3^2+3^2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -9$
Car c est le projeté orthogonal de B sur (EC)
$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DH'}.\overrightarrow{DE}$ car D et H' milieu de [DC] sont les projetés orthogonaux respectifs de A et F sur (DE)
$= 2 \times (4+3) =$ **14** car $\overrightarrow{DH'}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires de même sens.

<u>Exercice 8</u> :
$u_0 = 100\,000$
1°a) $u_1 = u_0 + \frac{5}{100}u_0 + 4000 = 1,05\,u_0 + 4000 = 1,05 \times 100\,000 + 4000 =$ **109 000**
De même $u_2 = 1,05\,u_1 + 4000 = 1,05 \times 109\,000 + 4000 =$ **118 450**

b) De même $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100}u_n + 4000 = 1,05\,u_n + 4000$

c) Saisir n
U ← 100000
Pour i allant de 1 à n
U ← 1,05 U + 4000
FinPour
Afficher U

```
PROGRAM:TERMEUN
:Prompt N
:100000→U
:For(I,1,N)
:1.05U+4000→U
:End
:Disp U
```

A la calculatrice : au 1er janvier 2020, c'est u_{15} .

```
prgmTERMEUN
N=?15
          294207.0723
                 Done
```

Donc on peut conjecturer qu'au 1er janvier 2020, il y aura ≃ 294 207 habitants.

2°) On admet que $u_n = 180\,000(1,05)^n - 80\,000$.
a) Le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier 2020 sera de $u_{15} = 180\,000 \times 1,05^{15} - 80\,000$ **≃ 294 207 habitants.**

b) Pour déterminer le sens de variation de la suite (u_n), on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = 180\,000(1,05)^{n+1} - 80\,000 - (180\,000(1,05)^n - 80\,000) = 180\,000(1,05^{n+1} - 1,05^n)$
$= 180\,000(1,05^n \times 1,05 - 1,05^n) = 180\,000 \times 1,05^n\,(1,05 - 1) = 180\,000 \times 1,05^n \times 0,05 = 9000 \times 1,05^n$ qui est positif . Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n \geq 0$, **donc la suite (u_n) est croissante**.