AP 1S : LOI BINOMIALE 2 : Corrigé

Ex1 : 1°) Considérons l'épreuve de Bernoulli : Alex écoute une chanson,

comme succès : la chanson est inédite de probabilité $p = \frac{5}{25} = 0{,}2$

On répète n = 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

X, qui compte le nombre de succès, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4\ ;\ 0{,}2)$.

2°) $P(X = 2) = \binom{4}{2} 0{,}2^2 \times (1-0{,}2)^{4-2} = 6 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^2 = 0{,}1536$ (en utilisant la formule)

$P(X = 3) = 0{,}0256$ (à la calculatrice en utilisant binomFdp(4,0.2,3))

3°) X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3 et 4.

On obtient la l oi de probabilité (les calculs sont effectués avec l'instruction binomFdp de la calulatrice)

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Rq : la somme des 5 probabilités fait bien 1

4°) Dans le cas d'une loi binomiale, $E(X) = n.p = 4 \times 0{,}2 = 0{,}8$

Et aussi $E(X) = 0 \times 0{,}4096 + 1 \times 0{,}4096 + 2 \times 0{,}4096 + 3 \times 0{,}0256 + 4 \times 0{,}0016 = 0{,}8$

5°) On veut $P(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - (0{,}4096 + 0{,}4096) = 0{,}1808$ ou 1 – binomFRép = 0,1808

Ex2 : 1°) On rentre dans la calculatrice toutes les valeurs prises par X : les entiers k de 0 à 300, et les probabilités correspondantes $P(X \leq k)$ = binomFRép(300,0.06,k).

Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$ est a = **10** car $P(X \leq 9) \simeq 0{,}0132$ et $P(X \leq 10) \simeq 0{,}0268$

2°) Le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$ est b = **26** car $P(X \leq 25) \simeq 0{,}9604$ et $P(X \leq 26) \simeq 0{,}9757$

3°) L'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence correspondant à la réalisation de X sur un échantillon aléatoire de taille 300 est : $I = \left[\frac{10}{300}\ ;\ \frac{26}{300}\right] \simeq [0{,}033\ ;\ 0{,}087]$ à 10^{-3} près

Attention : La borne de gauche est arrondie par défaut, celle de droite par excès

4°) Pour la machine A : on calcule $f_A = \frac{23}{300} \simeq 0{,}077$

Pour la machine B : on calcule $f_B = \frac{28}{300} \simeq 0{,}093$

On remarque que $f_A \in I$ alors que $f_B \notin I$.

Donc au seuil de 95%, on accepte l'hypothèse « p = 0,06 » pour la machine A, alors qu'on la rejette pour la machine B.

Donc on peut considérer, au seuil de 95%, que la machine est bien réglée (contrairement à la machine B).

Ex3 :

1°) Considérons l'épreuve de Bernoulli : Julien lance le ballon 1 fois,

comme succès : il marque le panier de probabilité p = 0,6

On répète n = 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

X, qui compte le nombre de succès, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4\ ;\ 0{,}6)$.

a) $P(X = 3) = 0{,}3456$ (à la calculatrice en utilisant binomFdp(4,0.6,3))

b) $P(X = 0) \simeq 0{,}0256$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}0256 = 0{,}9744$

2°) On considère la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ 0{,}6)$.

On cherche n tel que $P(X \geq 1) \geq 0{,}999$

Or $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}6^0 \times (1-0{,}6)^{n-0} = 1 - 0{,}4^n$

On résout alors $1 - 0{,}4^n \geq 0{,}999$

Par tâtonnement, on trouve $1 - 0{,}4^7 \simeq 0{,}9984$ et $1 - 0{,}4^8 \simeq 0{,}9999$. Donc $n \geq 8$.

Il faut donc que Julien réalise au moins 8 lancers pour que la probabilité qu'il marque au moins 1 panier soit supérieure à 0,999.

Ex4 :
1°) Considérons l'épreuve de Bernoulli : un patient absorbe le médicament,
comme succès : il marque le panier de probabilité p = 0,014.
On répète n = 150 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
X, qui compte le nombre de succès, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(150 ; 0,014)$.

2°) E(X) = n.p = 150 × 0,014 = 2,1. Donc le nombre moyen de patients subissant des effets secondaires sur un échantillon de 150 patients est de 2,1.

3°) On rentre dans la calculatrice toutes les valeurs prises par X : les entiers k de 0 à 150, et les probabilités correspondantes $P(X \leq k)$ = binomFRép(150,0.014,k).
Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est a = **0** car $P(X \leq 0) \simeq 0,1207$

Le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est b = **5** car $P(X \leq 4) \simeq 0,9392$ et $P(X \leq 5) \simeq 0,9804$

L'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence correspondant à la réalisation de X sur un échantillon aléatoire de taille 1510 est : I = $\left[\frac{0}{150} ; \frac{5}{150}\right] \simeq [0 ; 0{,}034]$ à 10^{-4} près

Attention : La borne de de droite est arrondie par excès

4°) On calcule la fréquence qu'un patient subisse des effets secondaires dans l'échantillon : f = $\frac{3}{150}$ = 0,02

On remarque que $f \in I$.
Donc au seuil de 95%, on accepte l'hypothèse « p = 0,014 ».
Donc au seuil de 95%, on peut dire que l'échantillon est représentatif de la population total, donc …

Ex5 : 1°) Considérons l'épreuve de Bernoulli : un individu fait une analyse,
comme succès : il est allergique au médicament A de probabilité p = 0,05.
On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
X, qui compte le nombre de succès, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n ; 0,05)$.

2°) n = 10
$P(X = 0) \simeq 0,60$ à 10^{-2} près (à la calculatrice en utilisant binomFdp(10,0.05,0))
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \simeq 0,09$ à 10^{-2} près (à la calculatrice : 1 – binomFRép(10,0.05,1))

3°) Soit Y la variable qui donne le nombre d'individus allergiques à B sur un échantillon de 100 individus.
De même qu'en 1°) , On peut dire que Y suit $\mathcal{B}(100; 0,4)$.

On rentre dans la calculatrice toutes les valeurs prises par X : les entiers k de 0 à 10, et les probabilités correspondantes $P(X \leq k)$ = binomFRép(100,0.4,k).
Le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ est a = **31** car $P(X \leq 30) \simeq 0,0248$ et $P(X \leq 31) \simeq 0,0399$

Le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$ est b = **50** car $P(X \leq 49) \simeq 0,973$ et $P(X \leq 50) \simeq 0,983$

L'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence correspondant à la réalisation de X sur un échantillon aléatoire de taille 1510 est : I = $\left[\frac{31}{100} ; \frac{50}{100}\right] = [0{,}31 ; 0{,}5]$
On calcule la fréquence qu'un patient soit allergique au médicament B dans l'échantillon :f = $\frac{31}{100}$ = 0,31

On remarque que $f \in I$.
Donc au seuil de 95%, on accepte l'hypothèse « p = 0,014 ».
Donc au seuil de 95%, on peut dire que l'échantillon est représentatif de la population total, concernant le médicament B.

Ex6 : Réponses :
1°) X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 ; 0,16)$.
2°) $P(X = 5) \simeq 0,1189$
3°) $P(X \geq 2) \simeq 0,8529$
4°) E(X) = 3,2