T ES

Graphes probabilistes 2

Ex1 : Un théâtre propose deux types d'abonnements pour l'année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.
On considère un groupe de 2500 personnes qui s'abonnent tous les ans. *n* étant un entier naturel, on note :

a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année *n* ;

b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année *n* ;

P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ traduisant l'état probabiliste à l'année *n*.

Tous les ans, 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.
1°) On suppose que, l'année zéro, 1500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 l'abonnement B. Déterminer l'état initial $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$.
2°) **a.** Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
b. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
c. En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.
3°) Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable, où *x* et *y* sont deux nombres réels positifs tels que *x* + *y* = 1. Justifier que *x* et *y* vérifient l'équation *x* = 0,85*x* + 0,45*y* puis déterminer *x* et *y*.
4°) En déduire la limite de la suite (a_n) quand *n* tend vers $+\infty$.
5°) Interpréter le résultat précédent en termes de nombre d'abonnements de type A.

Ex2 : On considère une grande population d'acheteurs de yaourts. On suppose que l'effectif de cette population est stable. Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.
30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.
L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.
Au bout d'une semaine, une enquête indique que :
- 20 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.
- 10 % des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.
1°) Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
2°) Soit $X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.
Donner la matrice de transition (notée *M*) associée au graphe précédent.
3°) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.

Ex3 : On a divisé une population en deux catégories « fumeurs » et « non-fumeurs ». Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre :

- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que les taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.
On désigne par :
- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang *n*,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang *n*, où *n* est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs. On a donc $f_0 = g_0 = 0{,}5$.
1°) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2°) Justifier l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times A$ où A désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$.
3°) Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4°) Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5°) Montrer que pour tout entier naturel *n*, $f_{n+1} = 0{,}5 f_n + 0{,}1$.
6°) On pose, pour tout entier naturel *n*, $u_n = f_n - 0{,}2$. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
7°) Donner l'expression de u_n en fonction de *n*.
8°) En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $f_n = 0{,}3 \times 0{,}5^n + 0{,}2$.
9°) Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque *n* tend vers $+\infty$ et l'interpréter.