AP **TES Spé : Graphes probabilistes**

Ex1 :On considère une population donnée d'une île de Bretagne se rendant régulièrement sur le continent. Deux compagnies maritimes A et B effectuent la traversée. En 2008, 60 % de la population voyage avec la compagnie A. Les campagnes publicitaires font évoluer cette répartition. Une enquête indique alors que chaque année, 20 % des clients de la compagnie A l'abandonnent au profit de la compagnie B et que 10 % des clients de la compagnie B choisissent la compagnie A.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de l'année 2008 + n est définie par la matrice ligne $(x_n \quad y_n)$ où x_n désigne la proportion de la population qui voyage avec la compagnie A et y_n la proportion de la population qui voyage avec la compagnie B.

1°) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2°) Ecrire la matrice de transition M de ce graphe.
3°) Préciser l'état initial P_0 puis montrer que $P_1 = (0{,}52 \quad 0{,}48)$.
4°) Déterminer la répartition prévisible du trafic entre les compagnies A et B en 2011.
5°) Déterminer l'état stable et l'interpréter.
6°) Montrer que, pour tout entier n, $x_{n+1} = 0{,}7x_n + 0{,}1$.
7°) On admet que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = \frac{4}{15}\times 0{,}7^n + \frac{1}{3}$. Déterminer la limite de la suite (x_n) puis l'interpréter.

Ex 2 : Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale. Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité. L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires. Chaque semaine il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un des deux produits. Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre. La semaine de début de campagne est notée 0.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1°) Déterminer la matrice ligne de l'état initial.
2°) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A pour Aurore et B pour Boréale).
3°) Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
4°) Montrer que la matrice ligne $P_1 = (0{,}3 \quad 0{,}7)$.
5°) Exprimer pour tout entier naturel n, P_n en fonction de n et de P_0. En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.
6°) Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne de l'état stable. Déterminer a et b.
7°) Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

Ex3 : Deux joueurs A et B amateurs de tennis, décident de jouer une partie toutes les semaines. La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7. Si A gagne la partie la semaine n, il garde la même stratégie de jeu la semaine suivante et la probabilité qu'il gagne alors la semaine $(n + 1)$ est seulement de 0,4.

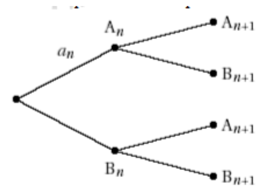
Si A perd la partie de la semaine n, il change sa stratégie de jeu pour la semaine suivante et la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine $(n + 1)$ est 0,9.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'événement : « A gagne la partie la n-ième semaine », par B_n : « B gagne la partie la n-ième semaine ». On note $a_n = p(A_n)$. Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (a_n) en utilisant deux méthodes différentes.

Première méthode : Graphe probabiliste

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne $P_n = (a_n \quad 1 - a_n)$, la matrice des probabilités associée à la n-ième semaine.
1°) Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste et donner la matrice M de transition associée à ce graphe.
2°) Quelle est la probabilité que A gagne la partie de la 4ème semaine ?
3°) Déterminer la matrice ligne $P = (x \quad 1 - x)$ telle que $PM = P$.
4°) En déduire la limite de la suite (a_n) et interpréter le résultat obtenu.

Deuxième méthode : Probabilité et suites

1°) Compléter l'arbre ci-dessous :



2°) Justifier que $a_{n+1} = 0{,}9 - 0{,}5\, a_n$.
3°) On considère la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 0{,}6$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $- 0{,}5$.
4°) En déduire l'expression de a_n en fonction de n, puis la limite de la suite (a_n).