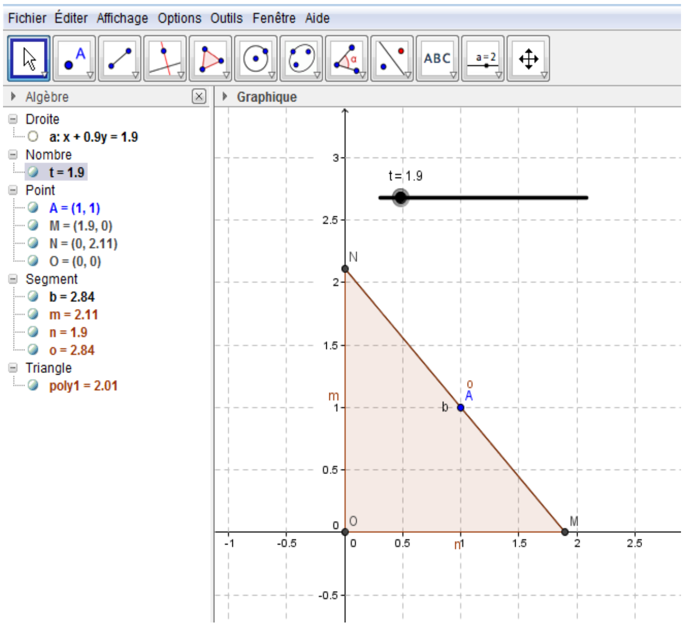
Etudes de FONCTIONS et PROBLEMES 2

Ex1 : Dans un repère, A est le point de coordonnées $(1\,;1)$. A tout nombre réel t ($t > 1$), on associe le point M de coordonnées $(t\,;0)$.
On note N le point où la droite (AM) coupe l'axe des ordonnées.
On se propose d'étudier les variations de l'aire du triangle OMN en fonction de t.

1°) Avec un logiciel de géométrie :

a) Réaliser la figure :



On créera un curseur t variant de 1 à 10 avec un incrément de 0,1. On affichera l'aire du polygone OMN.

b) Conjecturer les variations de l'aire du triangle OMN en fonction de t.
c) Il semble qu'il existe une position pour laquelle l'aire soit minimale. Quelle est cette position ?
d)

2°) Par le calcul :

a) Démontrer que l'ordonnée du point N est égale à $\frac{t}{t-1}$.

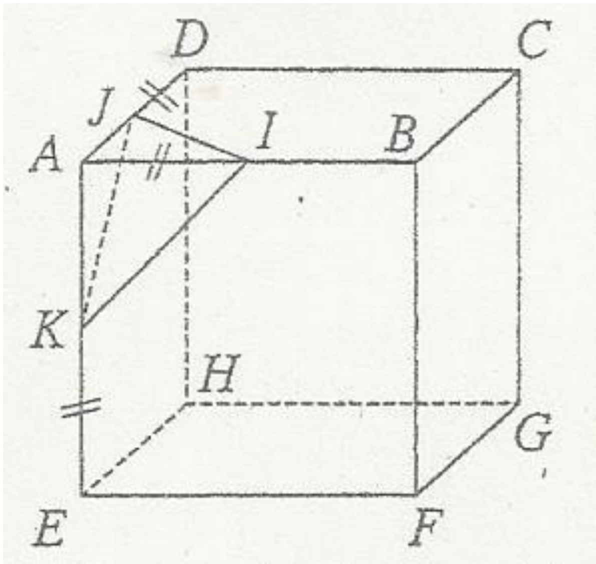
b) En déduire que l'aire du triangle OMN est :
$$S(t) = \frac{t^2}{2t-2}.$$

c) Dresser le tableau de variations de la fonction S.

d) Valider les conjectures émises à la question 1°).

Ex2 : ABCDEFGH est un cube de 5 cm d'arête.
A tout point I du segment [AB], on associe le point J du segment [AD] et le point K du segment [AE] tels que :
$$AI = DJ = EK.$$
On veut déterminer la position de I pour laquelle le volume du tétraèdre AIJK est maximal.

On pose $AI = x$ et on note $V(x)$ le volume, en cm^3, du tétraèdre $AIJK$.



1°) Préciser l'ensemble des valeurs prises par x et démontrer que $V(x) = \frac{1}{6}x(5-x)^2$.

2°) Etudier les variations de V sur $[0\,;5]$. Conclure.

Ex3 : Soit f la fonction définie pour sur $[-5;1[\cup]1;5]$par : $f(x) = \frac{x+1}{x^3-1}$.

1°) Démontrer que $f'(x) = \frac{P(x)}{(x^3-1)^2}$ où P est une fonction polynôme de degré 3 que l'on précisera.

2°) Etudier les variations de P sur $[-5\,;5]$. Dénombrer les solutions de l'équation $P(x) = 0$ et donner une valeur approchée de ces solutions à 10^{-2} près. En déduire le signe de $P(x)$ sur $[-5\,;5]$.

3° En utilisant les questions précédentes, donner les variations de f sur$[-5;1[\cup]1;5]$.

Approfondissement : Déterminer une équation de la tangente T à Cf au point d'abscisse 0 puis étudier la position relative entre Cf et T.