Term spé Maths **Correction du Travail vacances**

Exercice 1 :

1) $\boldsymbol{x^2+2x-3=0}$. $\Delta = b^2 - 4ac = 16 > 0$, il y a donc deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$. Ainsi **S = {– 3 ; 1}.**

Remarque : x_1 et x_2 peuvent se trouver à la calculatrice : résol/Racines d'un polynôme

2) $\boldsymbol{x^2-2\sqrt{3}\,x+3=0}$. $\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times1\times3=12-12=0$, il y a une unique solution : $\alpha=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-2\sqrt{3})}{2\times1}=\sqrt{3}$. Ainsi **S = { $\sqrt{3}$ }.**

3) $\boldsymbol{x^2+2x+2=0}$. $\Delta=-4<0$, il n'y a aucune solution réelle. **S** = ∅

4) $\boldsymbol{3x^2-2x+2\geq 0}$. $\Delta = -20 > 0$. Le polynôme n'a pas de racine et est du signe de $a = 3$

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2-2x+2$	+	

S = ℝ

5) $\boldsymbol{\frac{1}{4}x^2-x+1>0}$.

Δ=0. Il y a 1 seule solution à l'équation $\frac{1}{4}x^2-x+1=0$ qui est $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2\times\frac{1}{4}}=2$.

Ainsi l'expression est toujours du signe de $a=\frac{1}{4}$, sauf en 2, c'est-à-dire positive ou nulle.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\frac{1}{4}x^2-x+1$		+	0	+	

Ainsi **S** = ℝ –{2} ou **S =]-∞ ;2[∪]2 ;+ ∞[**

6) $\boldsymbol{-3x^2+x-2<0}$.

$\Delta=-23<0$. Il n'y a pas de solution à l'équation $-3x^2+x-2=0$.

L'expression est toujours du signe de $a = -3$, c'est-à-dire négative.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-3x^2+x-2$	–	

Ainsi **S = ℝ .**

Exercice 2 :

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$. f est une fonction polynôme de degré 3 donc définie sur ℝ.
Elle est aussi dérivable sur ℝ. Pour tout réel x, on a : $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$.
f' est une fonction polynôme de degré 2, ses racines sont 0 et 4.
On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	– 30	$\nearrow$	

2) $f(x) = (2-x)e^x$. f est définie sur ℝ. f est le produit de deux fonctions dérivables sur ℝ, elle est donc dérivable sur ℝ.
Pour tout réel x, on a :
On pose $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = e^x$. Ainsi $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$.
On a donc : $f'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) = -e^x + (2-x)e^x$
Soit $f'(x) = e^x(-1+2-x) = e^x(1-x)$.
On a le tableau suivant :

x	-∞		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	–	
e^x		+	|	+	
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$		$\nearrow$	e	$\searrow$	

$f(1) = (2-1)\,e^1 = \mathrm{e}$

3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$.
$x^2 + 3 \neq 0$ donc f est définie sur ℝ . f est le quotient de deux fonctions dérivables avec $x^2 + 3 \neq 0$, elle est donc dérivable sur ℝ .
Pour tout réel x réel, on a : $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x^2 + 3$. Ainsi $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.

On a donc : $f'(x)=\dfrac{1(x^2+3)-2x(x+1)}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$.

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x^2-2x+3$ car $(x^2+3)^2 > 0$
De plus Δ= 16, il y a deux solutions $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		– 3		1		$+\infty$
$-x^2-2x+3$		–	0	+	0	–	
$(x^2+3)^2$		+	|	+	|	+	
$f'(x)$		–	0	+	0	–	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

4) $f(x) = e^{2x} - 2x$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout x réel, $f'(x) = 2 \times e^{2x} - 2$

Pour étudier le signe, on résout l'inéquation :

$$2\,e^{2x} - 2 \geq 0 \iff e^{2x} - 1 \geq 0 \;\; (on\ simplifie\ par\ 2)$$

$$\iff e^{2x} \geq 1 \;\; (avec\ e^0 = 1)$$

$$\iff e^{2x} \geq e^0$$

$$\iff 2x \geq 0$$

$$\iff x \geq 0$$

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5\,000$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}03\, u_n + 300$

On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 10\,000$

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

▪ Pour tout entier naturel n, on a :

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} + 10\,000 && \textit{définition de } (v_n) \\
&= 1{,}03\, u_n + 300 + 10\,000 && \textit{définition de } (u_n) \\
&= 1{,}03\, u_n + 10\,300 && \\
&= 1{,}03\left(u_n + \frac{10\,300}{1{,}03}\right) && \textit{on factorise par } 1{,}03 \\
& && \textit{avec } \frac{10\,300}{1{,}03} = 10\,000 \\
&= 1{,}03\,(u_n + 10\,000) && \\
&= 1{,}03\, v_n && \textit{définition de } (v_n)
\end{aligned}
$$

▪ On en déduit que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $q = 1{,}03$

et de premier terme $v_0 = u_0 + 10\,000 = 15\,000$

définition de (v_n)

2. En déduire v_n, puis u_n, en fonction de n.

▪ On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n = 15\,000 \times 1{,}03^n$

▪ Et : $u_n = 10\,000 - v_n$ définition de (v_n)

Soit : $u_n = 10\,000 - 15\,000 \times 1{,}03^n$

Voir aussi le corriger de l'exercice en vidéo :

https://www.youtube.com/watch?v=6-vFnQ6TghM

Exercice 4

Partie A

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 1,25$.

1) a)

```
def suite(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=u+1.25
    return u
```

pour n = 5

i		1	2	3	4	5
u	1	2.25	3,5	4,75	6	7,25

b)

```
def suite(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=u+1.25
    return u
```

Console Python

```
>>> suite(5)
7.25
>>> suite(1000)
1251.0
>>>
```

c) Cette fonction calcule le terme de rang n de la suite arithmétique u. Elle renvoie u_n.

2) a) (u_n) est arithmétique, donc $u_n = u_0 + n.r$; donc $\mathbf{u_n = 1 + 1{,}25n}$

b) On résout $u_n \geq 10^9 \Leftrightarrow 1 + 1{,}25n \geq 10^9$

$\Leftrightarrow 1{,}25\, n \geq 10^9 - 1$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{10^9-1}{1{,}25}$ or $\frac{10^9-1}{1{,}25} \simeq 799\,999\,999{,}2$

Donc $u_n \geq 10^9 \Leftrightarrow$ $\mathbf{n \geq 800\,000\,000}$

3) $\sum_{k=0}^{1000} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{1000} = \text{nbtermes}\ \frac{1 er terme + dernier}{2}$

$= 1001\ \frac{1+u_{1000}}{2} = 1001\ \frac{1+1+1{,}25\times 1000}{2} = 1001\times \frac{1+1+1{,}25\times1000}{2} =$
$1001\times \frac{1+125}{2} = 1001\times 626 = \mathbf{626\,626}$

Partie B

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 10\,000$ et de raison $q = \frac{3}{4}$

1) a) (u_n) est géométrique, donc $v_n = v_0 \times q^n$; donc $\mathbf{v_n = 10\,000 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n}}$

b) $v_{10} = 10\,000 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \simeq 563{,}135$

2)

```
def suite():
    v=10000
    n=0
    while v>10**-9:
        v=v*3/4
        n=n+1
    return n
```

```
>>>
>>>
>>>
>>> suite()
105
>>>
```

Donc $v_n \geq 10^{-9}$ **pour $n \geq 105$.**

Remarque : $u_{104} \approx 1{,}0148 \times 10^{-9} \geq 10^{-9}$
$u_{105} \approx 7{,}6108 \times 10^{-10} < 10^{-9}$

3) $\sum_{k=0}^{1000} v_k = v_0 + v_1 + \ldots + v_{1000} = 1^{er}$ terme$\frac{1-q^{Nbtermes}}{1-q} = 10\,000\ \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{1001}}{1-\frac{3}{4}}$

$= 10\,000\ \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{1001}}{\frac{1}{4}} = \mathbf{40\,000\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{1001}\right)} \simeq 40\,000$.