Term spé Maths **Correction du Travail vacances** **sept 2023**

Exercice 1 :

1) $\boldsymbol{x^2 + 2x - 3 = 0}$. $\Delta = b^2 - 4ac = 16 > 0$, il y a donc deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$. Ainsi $\mathbf{S = \{-3\ ;\ 1\}}$.

Remarque : x_1 et x_2 peuvent se trouver à la calculatrice : résol/Racines d'un polynôme

2) $\boldsymbol{x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 = 0}$. $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4\times1\times3 = 12 - 12 = 0$, il y a une unique solution : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2\sqrt{3})}{2\times1} = \sqrt{3}$. Ainsi $\mathbf{S = \{\sqrt{3}\}}$.

3) $\boldsymbol{x^2 + 2x + 2 = 0}$. $\Delta = -4 < 0$, il n'y a aucune solution réelle. $\mathbf{S} = \emptyset$

4) $\boldsymbol{-3x^2 - 2x + 2 \geq 0}$. $\Delta = 28 > 0$. Le polynôme a 2 racines $x_1 = \dfrac{2-2\sqrt{7}}{-6} = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
$-3x^2-2x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

du signe de a à l'extérieur des racines

$$\mathbf{S} = \left[\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\ ;\ \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right]$$

5) $\boldsymbol{\frac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0}$.

$\Delta=0$. Il y a 1 seule solution à l'équation $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$ qui est $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2\times\frac{1}{4}} = 2$.

Ainsi l'expression est toujours du signe de $a = \frac{1}{4}$, sauf en 2, c'est-à-dire positive ou nulle.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\frac{1}{4}x^2 - x + 1$		$+$	0	$+$	

Ainsi $\mathbf{S} = \mathbb{R} - \{2\}$ ou $\mathbf{S} =]-\infty\ ;2[\ \cup]2\ ;+\infty[$

6) $\boldsymbol{-3x^2 + x - 2 < 0}$.

$\Delta = -23 < 0$. Il n'y a pas de solution à l'équation $-3x^2 + x - 2 = 0$.

L'expression est toujours du signe de $a = -3$, c'est-à-dire négative.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-6x^2+12x+90$		$-$	

Ainsi $\mathbf{S} = \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$. f est une fonction polynôme de degré 3 donc définie sur $\mathbb{R}$.

Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a : $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$.

f' est une fonction polynôme de degré 2, ses racines sont 0 et 4.

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	2	↘	-30	↗	

2) $f(x) = (2-x)e^x$. f est définie sur $\mathbb{R}$. f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a :

On pose $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = e^x$. Ainsi $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$.

On a donc : $f'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) = -e^x + (2-x)e^x$

Soit $f'(x) = e^x(-1+2-x) = e^x(1-x)$.

On a le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	e	↘	

$f(1) = (2-1)\,e^1 = \mathrm{e}$

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$.

$x^2 + 3 \neq 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$. f est le quotient de deux fonctions dérivables avec $x^2 + 3 \neq 0$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x réel, on a : $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x^2 + 3$. Ainsi $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.

On a donc : $f'(x) = \dfrac{1(x^2+3) - 2x(x+1)}{(x^2+3)^2} = \dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$.

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x^2 - 2x + 3$ car $(x^2+3)^2 > 0$

De plus $\Delta = 16$, il y a deux solutions $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+3)^2$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	

4) $f(x) = e^{2x} - 2x$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

Pour tout x réel, $f'(x) = 2 \times e^{2x} - 2$

Pour étudier le signe, on résout l'inéquation :

$$2\,e^{2x} - 2 \geq 0 \iff e^{2x} - 1 \geq 0 \ \ (on\ simplifie\ par\ 2)$$

$$\iff e^{2x} \geq 1 \ \ (avec\ e^{0} = 1)$$

$$\iff e^{2x} \geq e^{0}$$

$$\iff 2x \geq 0$$

$$\iff x \geq 0$$

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Pour plus d'explication, voir Vidéo :

https://pod.ac-normandie.fr/video/19370-exo2_etude4bmp4/31a16a5f911bcea5b59d8dbfb83008259620a427d71925b5837a7717d3276d05/

Exercice 3 :

Corriger l'exercice en visionnant la vidéo :

https://www.youtube.com/watch?v=6-vFnQ6TghM

Exercice 4 **Partie A**

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 1,25$.

1) a)

```
def suite(n):
   u=1
   for i in range(1,n+1):
      u=u+1.25
   return u
```

pour n = 5

i		1	2	3	4	5
u	1	2.25	3,5	4,75	6	7,25

b)

```
def suite(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=u+1.25
    return u
```

Console Python

```
>>> suite(5)
7.25
>>> suite(1000)
1251.0
>>>
```

c) Cette fonction calcule le terme de rang n de la suite arithmétique u. Elle renvoie u_n.

2) a) (u_n) est arithmétique, donc $u_n = u_0+n.r$; donc $\mathbf{u_n = 1 + 1{,}25n}$

b) On résout $u_n \geq 10^9 \Leftrightarrow 1 + 1,25n \geq 10^9 \Leftrightarrow 1,25\, n \geq 10^9 - 1$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{10^9-1}{1,25}$ or $\frac{10^9-1}{1,25} \simeq 799\,999\,999,2$

Donc $u_n \geq 10^9$ **pour n ≥ 800 000 000**

3) $\sum_{k=0}^{1000} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{1000} = \text{nbtermes}\, \frac{1erterme+dernier}{2}$

$= 1001\, \frac{1+u_{1000}}{2} = 1001\, \frac{1+1+1,25\times1000}{2} = 1001\times \frac{1+1+1,25\times1000}{2} =$

$1001\times \frac{1+125}{2} = 1001\times626 =$ **626 626**

Partie B

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 10\,000$ et de raison $q = \frac{3}{4}$

1) a) (u_n) est géométrique, donc $v_n = v_0 \times q^n$; donc $\mathbf{v_n = 10\,000 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

b) $v_{10} = 10\,000\times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \simeq 563,135$

2)

```
def suite():
    v=10000
    n=0
    while v>10**-9:
        v=v*3/4
        n=n+1
    return n
```

```
>>>
>>>
>>>
>>> suite()
105
>>>
```

Donc $v_n \geq 10^{-9}$ **pour n ≥ 105.**

Remarque : $u_{104} \approx 1,0148 \times 10^{-9} \geq 10^{-9}$
$u_{105} \approx 7,6108 \times 10^{-10} < 10^{-9}$

3) $\sum_{k=0}^{1000} v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_{1000} = 1^{er}\text{ terme}\frac{1-q^{Nbtermes}}{1-q} = 10\,000\, \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{1001}}{1-\frac{3}{4}}$

$= 10\,000\, \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{1001}}{\frac{1}{4}} = \mathbf{40\,000\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{1001}\right)} \simeq 40\,000$.

Exercice 5 : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1) a) $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{1}{2}10 + 1 = 6$ $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{1}{2}6 + 1 = 4$

$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 1 = \frac{1}{2}4 + 1 = 3$

b) $u_1 - u_0 = -4$

$u_2 - u_1 = -2$. On ne passe pas d'un terme à l'autre en ajoutant toujours le même nombre, cette suite n'est donc pas arithmétique.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{6}$. On ne passe pas d'un terme à l'autre en multipliant toujours par le même nombre, cette suite n'est donc pas géométrique.

c) On peut conjecturer que la suite (u_n) semble être décroissante et converger (vers 2, si on calcule plus de termes).

2) $v_n = u_n - 2$.

a) Pour tout n entier naturel **:**

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $\left(\frac{1}{2}\right)$ et de premier terme

$v_0 = u_0 - 2 = 8$.

b) On a donc pour tout entier naturel *n* $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et $u_n = v_n + 2 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

3) *a)* p = 1 $10^{-1} = 0{,}1$

u	10	6	4	3	2,5	2,25	2,125	2,0625
n	0	1	2	3	4	5	6	7
Condition V/F	V	V	V	V	V	V	V	F

Cet algorithme renvoie : n = 7 (vérifié sur edupython)

b) Sur Python :

```
def seuil(p):
    u=10
    n=0
    while u-2>=10**(-p):
        u=(1/2)*u+1
        n=n+1
    return n
```

Console Python

```
>>> seuil(1)
7
>>> seuil(5)
20
>>>
```

Cet algorithme affiche le rang n à partir duquel le terme de la suite se rapproche de 2 (la limite) à 10^{-5}.

Réponse : 20. Donc le 1er rang n tel que $u_n - 2 < 10^{-5}$ est n = 20.