AP 2nde — CORRIGE FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRE 1

Exercice 1 :

x	-2		0		3
$f(x)$	4	↘	0	↗	9

2°) La courbe représentative de la fonction carré sur $\mathbb{R}$ est la parabole. Elle possède un axe de symétrie : l'axe des ordonnées.

3°) $f(2) = 2^2 = 4$ $\quad$ $f(-6) = (-6)^2 = 36$ $\quad$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$

4°) Les antécédents de 25 sont 5 et -5.
-4 n'a pas d'antécédent.
Les antécédents de 4 sont 2 et -2.
0 a un seul antécédent : 0
Les antécédents de 7 sont $\sqrt{7}$ et - $\sqrt{7}$.

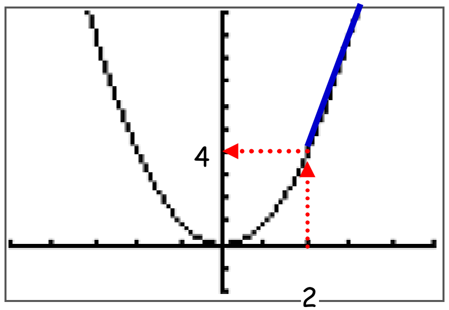
5°)

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
x^2	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Exercice 2 :

Toutes ces questions se traitent avec la parabole (exemple 1°)) ou avec un tableau de variation (exemple 2°) et 3°))

1°) Si $x > 2$, alors $x^2 > 4$ car



2°) Si $x \leq -4$, alors $x^2 \geq 16$ car

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	16	↘	0	↗	

3°) Si $-2 < x < 1$, alors $0 \leq x^2 < 4$ car

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	4	↘	0	↗	1	↗	

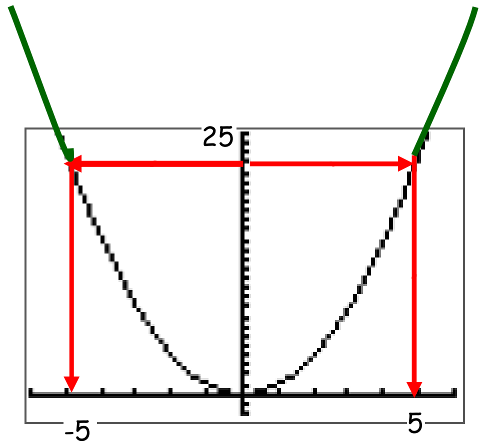
4°) Si $x > -1$, alors $x^2 \geq 0$

5°) Si $x < 2\sqrt{2}$, alors $x^2 \geq 0$ $\quad$ (avec $(2\sqrt{2})^2 = 8$)

6°) Si $-\frac{1}{4} \leq x \leq 1$, alors $0 \leq x^2 \leq 1$

7°) $-10 \leq x \leq 10$, alors $0 \leq x^2 \leq 100$

8°) Si $x \geq \sqrt{7}$, alors $x^2 \geq 7$.



Exercice 3 :

a) $x^2 \geq$ **25** : S =]-∞ ; -5] ∪ [5 ; + ∞[

De même , en utilisant la parabole, on obtient :

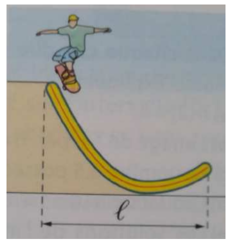
b) $x^2 \leq 16$ $\quad$ S = [-4 ; 4]

c) $x^2 \leq -3$ $\quad$ S = ∅

d) $1 \leq x^2 \leq 9$ $\quad$ S = [-3 ; -1] ∪ [1 ; 3]

Exercice 4 :

0,5 est l'image de $\sqrt{0{,}5} \simeq 0{,}71$
2 est l'image de $-\sqrt{2} \simeq -1{,}41$
La largeur de ce tremplin est donc $\ell = \sqrt{0{,}5} - (-\sqrt{2})$
$\simeq 2{,}12$ m (arrondi au centième).



Exercice 5 :

f(x) = – 2(x – 4)² + 3 = -2(x² - 8 x + 16) + 3 = - 2 x² + 16 x – 29 . Donc f est une fonction polynôme du 2nd degré puisque f(x) est sous la forme a x²+ b x + c où a b , c réels (a $\neq$0) a = -2 , b = 16 et c = -29.

g(x) = x²+ 2 x^3 non g n'est pas une fonction polynôme du 2nd degré (car x^3)

h(x) = – x + 5 x² – 2 . h est une fonction polynôme du 2nd degré a = 5 , b = -1 et c = - 2

i(x) = – 2 x ² + 6. i est une fonction polynôme du 2nd degré a = - 2 , b = 0 et c = 6.

k(x) = – 3 x + 1. k est une fonction affine, donc pas une fonction polynôme du 2nd degré.

Exercice 6 :

1°) f(x) = 2 x² – 6 x + 7

Le sommet S a pour coordonnées S(α ; β) ou S(x_S ; y_S)

$\alpha = x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2\times2} = 1{,}5$

β = f(α) = 2 x 1,5² - 6 x 1,5 + 7 = 2,5

Ainsi S (1,5 ; 2,5)

De même, on trouve :

2°) S (1,5 ; 7,75)

3°) S (– 2,5 ; – 9,25)

4°) S (– 0,3 ; – 7, 45)

5°) S (0 ; – 8)

6°) S (1,25 ; 3,125)

Exercice 7 :

1°) Pour f : le sommet S a pour coordonnées S(α ; β) ou S(x_S ; y_S)

$\alpha = x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times3} = 0{,}5$

β = f(α) = 2 x 0,5² - 6 x 0,5 + 7 = 0,25

Ainsi S (0,5 ; 0,25) et a = 3 >0, donc f est d'abord décroissante puis croissante.

x	$-\infty$	0,5	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	0 ,25	$\nearrow$

Pour g : g(x) = x²+ 4 x + 5 S (– 2 ; 1) a = 1 > 0

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

Pour h : $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2\times(-1)} = 2{,}5 \quad \beta = h(2{,}5) = 4{,}25$

ainsi S (2,5 ; 4,25) et a = -1 < 0

x	$-\infty$	2,5	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	4,25	$\searrow$

Pour i : S (0 ; 6) et a = -2 < 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$i(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$

Pour j : j(x) = – 2(x – 4)² + 3 = -2(x^2 - 8 x + 16) + 3 = -2 x^2 + 16 x - 29

S(4 ; 3)

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$j(x)$	↗	3	↘

2°) Les paraboles ont pour axe de symétrie la droite parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x = \alpha$

Donc la courbe représentative de la fonction f admet pour axe de symétrie :
x = 0,5.
La courbe représentative de la fonction g admet pour axe de symétrie :
x = -2.
La courbe représentative de la fonction h admet pour axe de symétrie :
x = 2,5.
La courbe représentative de la fonction i admet pour axe de symétrie :
x = 0.
La courbe représentative de la fonction j admet pour axe de symétrie :
x = 4.

3°) En utilisant la question précédente on a :

f : C3 g : C1 h : C4 i : C2 j : C5

Exercice 8 :

1°) Le sommet S(3 ; 4)
2°) Les solutions sont : 1 et 5
3°) f(x) = a (x – 1)(x – 5) donc
4°) On a f(3) = 4, donc a (3 – 1)(3 – 5) = 4 donc – 4 a = 4 donc a = -1
Donc f(x) = -1(x – 1)(x – 5) = -(x^2 - 5 x - x + 5) = - x^2 + 6 x - 5.

Exercice 9 :

-(x-3)²+4

Développer: $-x^2 + 6x - 5$

-(x-3)²+4

Factoriser: $-(x-5)(x-1)$

1°)a) La courbe P coupe-t-elle l'axe des ordonnées en (0 ; f(0)) soit (0 ; -5)
car f(0) = -5 d'après la forme développée.

b) On résout f(x) = 0 à l'aide de la forme factorisée :

Donc -(x - 5)(x – 1) = 0
Donc (x - 5)(x – 1) = 0
Donc x – 5 = 0 ou x – 1 = 0
Donc x = 5 ou x = 1

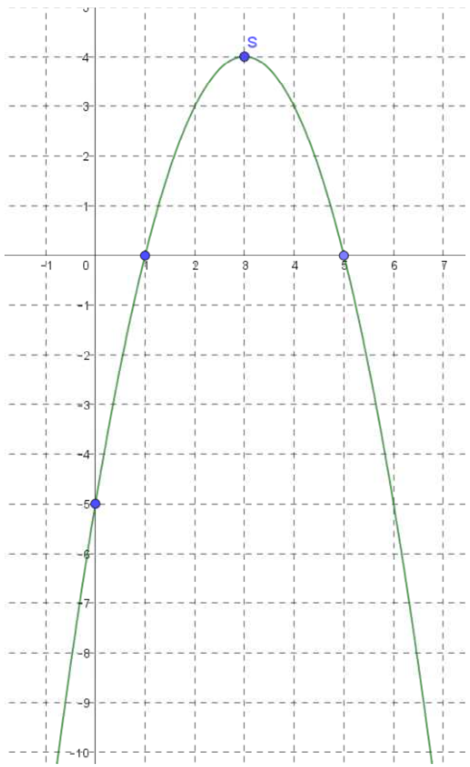
Donc la courbe P coupe- l'axe des abscisses en 2 points (5 ; 0) et (1 ; 0)

c)Le sommet S a pour coordonnées : $\alpha = x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\times(-1)} = 3$

β = f(α) =f(3) = - (3 – 3)² + 4 = 4
Ainsi S (3 ; 4)

d)f admet un maximum (car a = -1 < 0, donc f est d'abord croissante puis décroissante) qui vaut 4 , atteint en x = 3.

2°)



Exercice 10 : $x \in [5 ; 40]$.

1°) Le prix de vente = recette = R(x) = 100 x

2°) a) Le bénéfice vaut B(x) = recette – coût = R(x) – C(x)

= 100 x – (x^2 + 50 x + 100) = 100 x – x^2 - 50 x - 100

= - x^2 + 100 x – 50 x – 100 = - x^2 + 50 x – 100

b) B(10) = $-10^2 + 100 \times 10 - 100 = 300$.

B(40) = 300

Donc pour 10 et 40 objets, l'entreprise réalise le même bénéfice de 300€

c) $\alpha = x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{50}{2\times(-1)} = 25$

β = f(α) =f(25) = 525

Ainsi S (25 ; 525) et a = -1 < 0

x	5		25		40
B(x)	125	↗	525	↘	300

c) D'après le tableau de variation, le bénéfice est maximal pour une fabrication de 25 appareils . (Le bénéfice max est de 525€).

Exercice 11 : 1°) **$(3x + 1)(2x + 4) < 0$**

On résout : $3x + 1 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{-1}{3}$ puis $2x + 4 = 0$, c'est-à-dire $x = -2$

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1}{3}$		$+\infty$	
$3x + 1$		–	|	–	0	+		$m = 3 > 0$
$2x + 4$		–	0	+	|	+		$m = 2 > 0$
$(3x + 1)(2x + 4)$		+	0	–	0	+		

S =] -2 ;$-\frac{1}{3}$ [

2°) **$(-2x + 1)(x - 4) \leq 0$**

On résout : $-2x + 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 0{,}5$ puis $x - 4 = 0$, c'est-à-dire $x = 4$

x	$-\infty$		0,5		4		$+\infty$	
$-2x + 1$		+	0	–	|	–		$m = -2 < 0$
$x - 4$		–	|	–	0	+		$m = 1 > 0$
$(-2x + 1)(x - 4)$		–	0	+	0	–		

S =] $-\infty$; 0,5]$\cup$ [4 ; $+\infty$[

3°) $3x(1 - x) > 0$

On résout : $3x = 0$ soit $x = 0$ puis $1 - x = 0$ donc $x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x$		–	0	+	|	+	
$1 - x$		+		+	0	–	
$3x(1 - x)$		–	0	+	0	–	

S =]0 ; 1[

4°) **$(-x + 3)(-2x - 5) \geq 0$**

On résout $-x + 3 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$ puis $-2x - 5 = 0$, c'est-à-dire $x = -2{,}5$

x	$-\infty$		$-2{,}5$		3		$+\infty$	
$-x + 3$		+	|	+	0	–		$m = -1 < 0$
$-2x - 5$		+	0	–	|	–		$m = -2 < 0$
$(-x + 3)(-2x - 5)$		+	0	–	0	+		

S =] $-\infty$; $-2{,}5$]$\cup$[3 ; $+\infty$[

5°) **$(-7x + 3)(2 - x)(5x + 3) < 0$**

On résout $-7x + 3 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{3}{7}$ $2 - x = 0$, c'est-à-dire $x = 2$

$5x + 3 = 0$, $x = -\frac{3}{5}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$\frac{3}{7}$		2		$+\infty$	
$-7x + 3$		+	|	+	0	–	|	–		$m = -7 < 0$
$2 - x$		+	|	+	|	+	0	–		$m = -1 < 0$
$5x + 3$		–	0	+	|	+	|	+		$m = 5 > 0$
$(-7x + 3)(2 - x)(5x + 3)$		–	0	+	0	–	0	+		

$S = \left]-\infty\ ;\ -\frac{3}{5}\right[\cup \left]\frac{3}{7}\ ;\ 2\right[$

6°) $(-3x+1)(3-2x) > 0$

On résout : $-3x+1 = 0$ alors $x = \frac{1}{3}$ $\quad$ $3-2x = 0$ alors $x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$	
$-3x+1$		+	0	−		−		$m = -3 < 0$
$3-2x$		+		+	0	−		$m = -2 < 0$
$(-3x+1)(3-2x)$		+	0	−	0	+		

$S = \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$

7°) $(5x+2)(2x-4) \geq 0$

On résout $5x+2 = 0$ soit $x = -2{,}5$ puis $2x-4 = 0$ soit $x = 2$

x	$-\infty$		$-2{,}5$		2		$+\infty$	
$5x+2$		−	0	+		+		$m = 5 > 0$
$2x-4$		−		−	0	+		$m = 2 > 0$
$(5x+2)(2x-4)$		+	0	−	0	+		

$S = \left]-\infty\ ;\ -2{,}5\right] \cup \left[2\ ;\ +\infty\right[$

<u>Exercice 12</u> : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-1)^2 - 16$.

1°) $f(x) = 4(x-1)^2 - 16 = 4(x^2 - 2x + 1) - 16 = 4x^2 - 8x - 12$

le sommet S a pour coordonnées $S(\alpha\ ;\ \beta)$ ou $S(x_S\ ;\ y_S)$

$\alpha = x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2\times 4} = 1$

$\beta = f(\alpha) = f(1) = -16$

Ainsi S (1 ; -16) et a = 4 >0, donc f est d'abord décroissante puis croissante.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↘	-16	↗	

2°) $(2x-6)(2x+2) = 4x^2 + 4x - 12x - 12 = 4x^2 - 8x - 12 = f(x)$

3°) $f(x) = 0$

On résout $2x-6 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$ puis $2x+2 = 0$, c'est-à-dire $x = -1$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$	
$2x-6$		−	|	−	0	+		$m = 2 > 0$
$2x+2$		−	0	+	|	+		$m = 2 > 0$
$(2x-6)(2x+2)$		+	0	−	0	+		

$S = [-1\ ;\ 3]$

<u>Exercice 13</u> :

$B(x) = -0{,}002x^2 + x - 120$.

1) $B(750) = -495$. Le bénéfice réalisé pour la fabrication de 750 objets est de – 49 500 €. L'entreprise est donc en déficit de 49 500€

2) $a = -0{,}002 < 0$.

x	100		250		1200	
$f(x)$	-40	↗	5	↘	-1800	$\alpha = 250$, $\beta = 5$

Le maximum est 5. Le bénéfice maximal sera de 500 €.

3) $(-0{,}002x + 0{,}4)(x - 300) = -0{,}002x^2 + 0{,}6x + 0{,}4x - 120 = B(x)$

4) $B(x) > 0$

$-0{,}002x + 0{,}4 = 0$, c'est-à-dire $x = 200$ $\quad$ $x - 300 = 0$, c'est-à-dire $x = 300$

x	100		200		300		1200	
$-0{,}002x+0{,}4$		+	0	–	‖	–		$m=-0{,}002<0$
$x-300$		–	‖	–	0	+		$m=1>0$
$(2x-6)(2x+2)$		–	0	+	0	–		

S =]200 ; 300[
L'entreprise réalise un bénéfice entre 200 et 300 objets fabriqués.

Exercice 14 :

$B(x) = -x^2 + 90x + c$.

1) $C(50) = 75$, c'est-à-dire $-50^2 + 4500 + c = 75$,
soit $c = -2000 + 75 = -1925$.

2)
$a = -1 > 0$.

x	0		45		100
$f(x)$	-1925	↗	100	↘	-2925

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{90}{2\times(-1)} = 45$ $\qquad \beta = C(\alpha) = 100$

3) Le bénéfice maximal est de 100€ pour un taux d'occupation de 45 %.

4) ***a)*** $(-x+35)(x-55) = -x^2 + 55x + 35x - 1925 = -x^2 + 90x - 1925$
$= B(x)$

b) $B(x) = 0$,
c'est-à-dire $-x + 35 = 0$ donc $x = 35$ ou $x - 55 = 0$ donc $x = 55$.
Ainsi le bénéfice est nul pour un taux d'occupation de 35 % ou de 55 %.

c) $B(x) > 0$. Interpréter le résultat.

x	0		35		55		100	
$-x+35$		+	0	–	‖	–		$m=-1<0$
$x-55$		–	‖	–	0	+		$m=1>0$
$(-x+35)(x-55)$		–	0	+	0	–		

L'entreprise réalise un bénéfice entre 35 et 55 objets fabriqués.