Corrigé fonction inverse et fonctions quotients

Exercice 1 : a) $3 < 4$ et la fonction inverse est décroissante sur]0 ; + ∞[(ne conserve pas l'ordre) donc $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$

b) $\pi < 4$ et la fonction inverse est décroissante sur]0 ; + ∞[donc $\frac{1}{\pi} > \frac{1}{4}$

c) -5 < - 4 et la fonction inverse est décroissante sur]-∞ ; 0[donc $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{4}$

d) $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ donc $\sqrt{2} - 1 < \sqrt{3} - 1$ et la fonction inverse est décroissante sur]0 ; + ∞[donc $\frac{1}{\sqrt{2}-1} > \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

Exercice 2 : a) Si $x > 3$, alors $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$ car la fonction inverse est décroissante sur]0 ; + ∞[(donc ne conserve pas l'ordre)

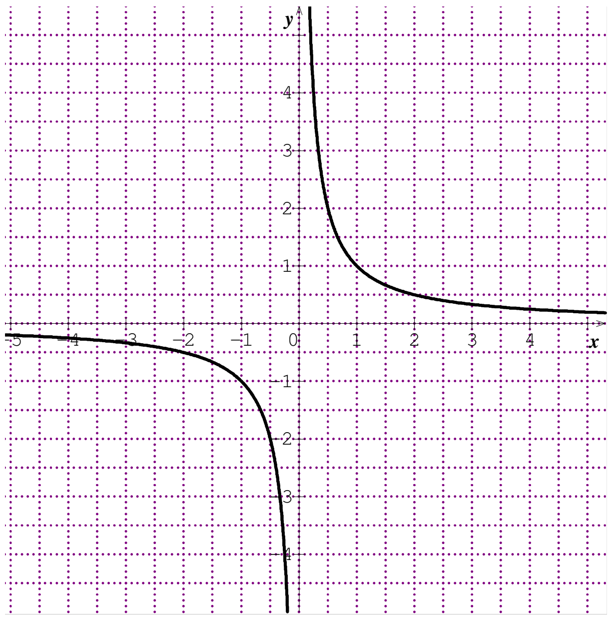
b) Si $x < -2$, alors $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$ car fonction inverse est décroissante sur]-∞ ; 0[

Exercice 3 :a) Si $3 \leq x \leq 4$ alors $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$ car la fonction inverse est décroissante sur]0 ; + ∞[(donc ne conserve pas l'ordre)

b) Si $-4 \leq x \leq -2$ alors $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{4}$ car la fonction inverse est décroissante sur]-∞ ; 0[

c) Si $x \geq 5$ alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$ car la fonction inverse est décroissante sur]0 ; + ∞[

d) Si $x < 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$ car l'inverse d'un positif reste positif.



Exercice 4 : En utilisant l'hyperbole représentant la fonction inverse : a) $\frac{1}{x} = 1$ S = { 1 }

b) $\frac{1}{x} = -2$ S = { $-\frac{1}{2}$ }

c) $\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$ S = { 4 }

d) $\frac{1}{x} = -0,1$ S = { - 10 }

Exercice 5 : En utilisant l'hyperbole représentant la fonction inverse : a) $\frac{1}{x} > \frac{3}{4}$ S = $]0 ; \frac{4}{3}[$

b) $\frac{1}{x} \leq \frac{3}{4}$ S = $]-\infty ; 0[\cup]\frac{4}{3} ; +\infty[$

c) $\frac{1}{x} \leq -3$ S = $]-\frac{1}{3} ; 0[$

d) $\frac{1}{x} > -2$ S = $]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]0 ; +\infty[$

Exercice 6 : a) 2

b) 1

c) 2

d) 1

Exercice 7 : a) $f(x) = -3 + \frac{1}{x-1} = \frac{-3(x-1)+1}{x-1} = \frac{-3x+4}{x-1}$

b) $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-3)(x-1)+1}{x-1} = \frac{x^2-x-3x+3+1}{x-1} = \frac{x^2-4x+4}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{5}{2} = \frac{1}{3}x + 2,5$

d) f(x) = $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2}{(x-1)(x+2)} - \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$

e) f(x) = $\frac{1}{x-1} - \frac{2\,x-5}{2x+1} = \frac{2x+1}{(x-1)(2x+1)} - \frac{(2x-5)(x-1)}{(2x+1)(x-1)} = \frac{(2x+1)-(2x^2-2x-5x+5)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{2x+1-2x^2+7x-5}{(2x+1)(x-1)}$

$= \frac{-2x^2+9x-4}{(x-1)(2x+1)}$

f) f(x) = $\frac{x-1}{x+2} - \frac{3x}{x+4} = \frac{(x-1)(x+4)}{(x+2)(x+4)} - \frac{3x(x+2)}{(x+2)(x+4)} = \frac{(x^2+4x-x-4)-(3x^2+6x)}{(x+2)(x+4)} = \frac{x^2+3x-4-3x^2-6x}{(x+2)(x+4)}$

$= \frac{-2x^2-3x-4}{(x+2)(x+4)}$

<u>Exercice 8</u> : D_f = $\mathbb{R}^*$ =]-∞ ; 0[∪]0 ; +∞[car il faut que $2x \neq 0$ donc que $x \neq 0$

D_g = $\mathbb{R}$ - { 3 } =]-∞ ; 3[∪]3 ; +∞[car il faut que $x - 3 \neq 0$ donc que $x \neq 3$

D_h = $\mathbb{R}$ - { $-\frac{2}{3}$ } =]-∞ ; $-\frac{2}{3}$ [∪] $-\frac{2}{3}$; +∞[car il faut que $3\,x + 2 \neq 0$ donc que $x \neq -\frac{2}{3}$

D_i = $\mathbb{R}$ - { $\frac{1}{5}$ } =]-∞ ; $\frac{1}{5}$ [∪] $\frac{1}{5}$; +∞[car il faut que $1 - 5\,x \neq 0$ donc que $x \neq \frac{1}{5}$

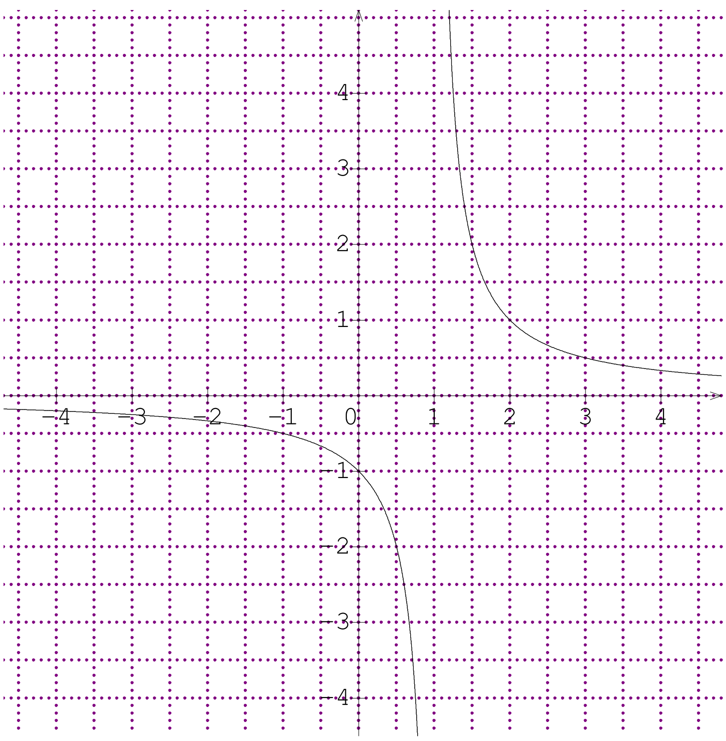
D_j = $\mathbb{R}^*$ =]-∞ ; 0[∪]0 ; +∞[car il faut que $2x \neq 0$ donc que $x \neq 0$

D_k = $\mathbb{R}$ - { 3 } =]-∞ ; 3[∪]3 ; +∞[car il faut que $4x - 12 \neq 0$ donc que $x \neq 3$

<u>Exercice 9</u> : 1°) D_f = $\mathbb{R}$ - { 1 } =]-∞ ; 1[∪]1 ; +∞[car il faut que $x - 1 \neq 0$ donc que $x \neq 1$

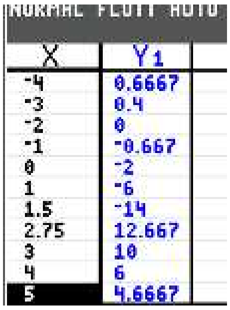
2°)

x	-4	-3	-2	-1	0	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2	3	4	5
f(x)	-0,2	-0,25	-0,33	-0,5	-1	-2	-4		4	2	1	0,5	0,33	0,25

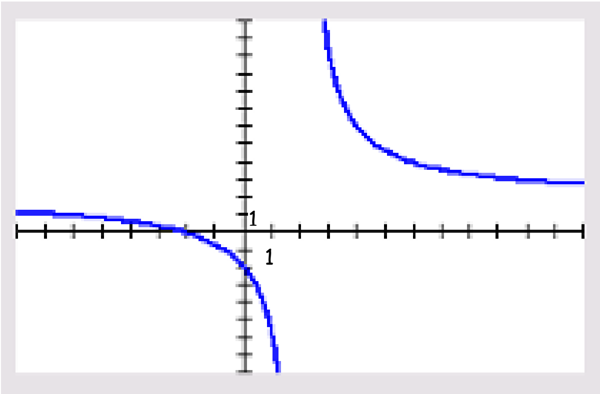


Exercice 10 : 1°) D_f = $\mathbb{R}$ - { 2 } =]-∞ ; 2[∪]2 ; +∞[car il faut que x - 2 ≠ 0 donc que $x \neq 2$

2°)


NORMAL FLOTT AUTO

X	Y_1
-4	0.6667
-3	0.4
-2	0
-1	-0.667
0	-2
1	-6
1.5	-14
2.75	12.667
3	10
4	6
5	4.6667



Exercice 11 :

1°) $\frac{2x-5}{-3x+6} \leq 0$

x	$-\infty$		2		$2{,}5$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+6$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{2x-5}{-3x+6}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

S =]- ∞ ; 2[∪ [2,5 ; + ∞[

2°) $\frac{x+5}{-2x+4} > 0$

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x+5}{-2x+4}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

S =]-5 ; 2[

3°) $\frac{x+1}{x+6} < 0$

x	$-\infty$		-6		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+1}{x+6}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

S =]-6 ; -1[

4°) $\frac{2-x}{4x+5} \leq 0$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2-x}{4x+5}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

S =] - ∞ ; - $\frac{5}{4}$ [∪ [2 ; + ∞[

5°) $\frac{3x+1}{x+3} \geq 0$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3x+1}{x+3}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

6°) $\frac{7x-1}{9-x} \leq 0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{7}$		9		$+\infty$
$7x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$9-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{7x-1}{9-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

<table>
<tr>
<td>S =]-∞ ; -3[∪] - $\frac{1}{3}$; +∞[</td>
<td>S =] - ∞ ; $\frac{1}{7}$] ∪]9 ; + ∞[</td>
</tr>
<tr>
<td>7°) $\frac{3\,x+1}{x+3} > 0$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-3</td><td></td><td>$-\frac{1}{3}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$3x+1$</td><td></td><td>$-$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$x+3$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{3x+1}{x+3}$</td><td></td><td>$+$</td><td>||</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>

S =] - ∞ ; -3[∪]$-\frac{1}{3}$; + ∞[</td>
<td>8°) $\frac{3\,x+1}{x+3} \geq 0$
Même tableau signe que 7°)

S = S =] - ∞ ; -3[∪ [$-\frac{1}{3}$; + ∞[</td>
</tr>
</table>

9°) $\frac{2x(1-2\,x)}{-3+x} \geq 0$

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>0,5</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$2x$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>1 - 2 x</td><td></td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>|</td><td>-</td><td></td></tr>
<tr><td>-3 + x</td><td></td><td>-</td><td>|</td><td>-</td><td>|</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{2x(1-2\,x)}{-3+x}$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>||</td><td>-</td><td></td></tr>
</table>

S =] -∞ ; 0] ∪ [0,5 ; 3[

10°) $\frac{3}{-x+4} \leq 0$

<table>
<tr><td>x</td><td>-∞</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>+</td><td>|</td><td>+</td></tr>
<tr><td>- x + 4</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{-x+4}$</td><td></td><td>+</td><td>||</td><td>-</td></tr>
</table>

S =]4 ; +∞[

<u>Exercice 12</u> :

1°) a) f(2) = 1 , f(5) ≃ 2,5

b) L'antécédent de 3 est 4 par f.

c)

Exercice 14 :

1°) Le coût hebdomadaire de fabrication vaut : 2000 + 50 x en €

2°) Le coût moyen de fabrication d'un article vaut : f(x) = $\frac{2000 + 50\,x}{x}$ = $\frac{2000}{x}$ + $\frac{50\,x}{x}$ = $\frac{2000}{x}$ + 50 en €

3°) Le nombre d'articles x est positif et doit être inférieur ou égal à 50 (d'après l'énoncé)

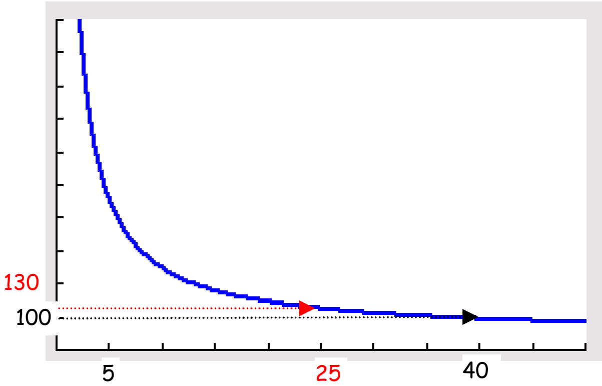
Donc $0 < x \leq 50$

Donc D_f =]0 ; 50]

f(x) = $\frac{2000 + 50\,x}{x}$. La fonction f est donc homographique.

4°) C'est f(20) = $\frac{2000 + 50 \times 20}{20}$ = $\frac{3000}{20}$ = 150. Donc le coût moyen unitaire lorsque l'entreprise produit 20 articles par semaine est de 150€.

5°)



avec comme fenêtre

FENêTRE
Xmin=0
Xmax=50
Xgrad=5
Ymin=0
Ymax=1000
Ygrad=100

Graphiquement, on peut dire que pour que le coût moyen soit compris entre 100€ et 130€, il faut produire entre 25 et 40 articles : $25 \leq x \leq 40$

6°) a) On résout f(x) = 175

soit $\frac{2000 + 50\,x}{x}$ = 175 soit 2000 + 50 x = 175 x soit 50 x – 175 x = -2000 donc -125 x = -2000

donc que x = $\frac{-2000}{-125}$ = 16. Il faut donc produire 16 articles pour avoir un coût moyen de 175€.

b) On résout f(x) < 100

soit $\frac{2000 + 50\,x}{x} < 100$

soit $\frac{2000 + 50\,x}{x}$ - 100 < 0

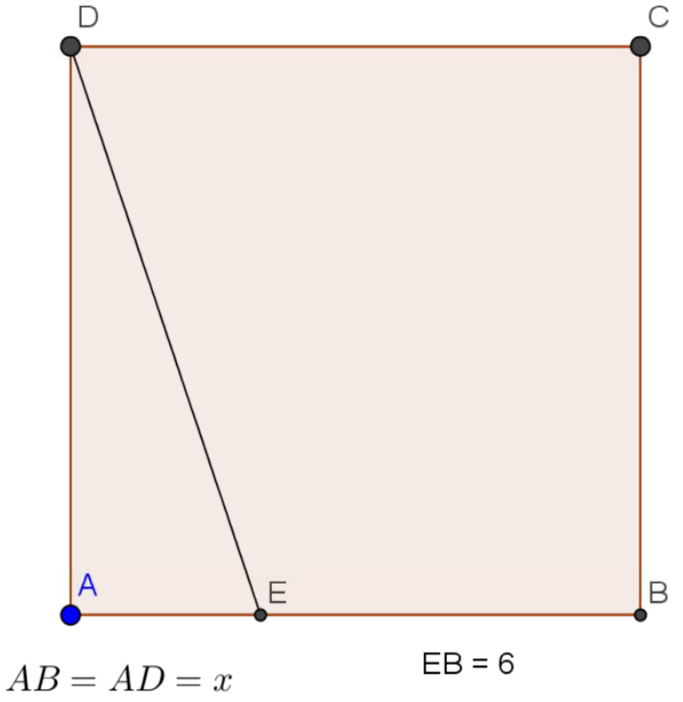
soit $\frac{2000 + 50\,x - 100x}{x} < 0$ (réduction au même dénominateur)

soit $\frac{2000 - 50\,x}{x} < 0$

x	0		40		50
2000 – 50 x		+	0	-	
x	0	+		+	
$\frac{2000 - 50\,x}{x}$	||	+	0	-	

S =]40 ; 50]

Donc le nombre d'articles à produire pour que le coût moyen devienne strictement inférieur à 100€ doit être strictement supérieur à 40, donc c'est à partir de 41 articles.



1°) L'aire du triangle ADE vaut : $\frac{AD \times AE}{2} = \frac{x(x-6)}{2} = \frac{x^2-6x}{2}$

2°) f(x) = $\frac{x^2-6x}{2}$

a) $x > 6$ donc Df =]6 ; +∞[

f n'est pas une fonction homographique, c'est une fonction polynôme du 2nd degré

b) On doit résoudre $x^2 > 3\,\frac{x^2-6x}{2}$

soit $2x^2 > 3x^2 - 18x$ soit $-x^2 + 18x > 0$ soit $x(-x + 18) > 0$

tableau de signe :

$-x + 18 = 0$ d'où $-x = -18$ et alors $x = 18$

x	$-\infty$		0		18		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$-x + 18$		+		+	0	-	

$x(-x+18)$	- 0 + 0 -

S =]0 ; 18[

Mais $x > 6$ donc l'aire du carré sera strictement au triple de celle du triangle quand $x \in$ [6 ; 18[