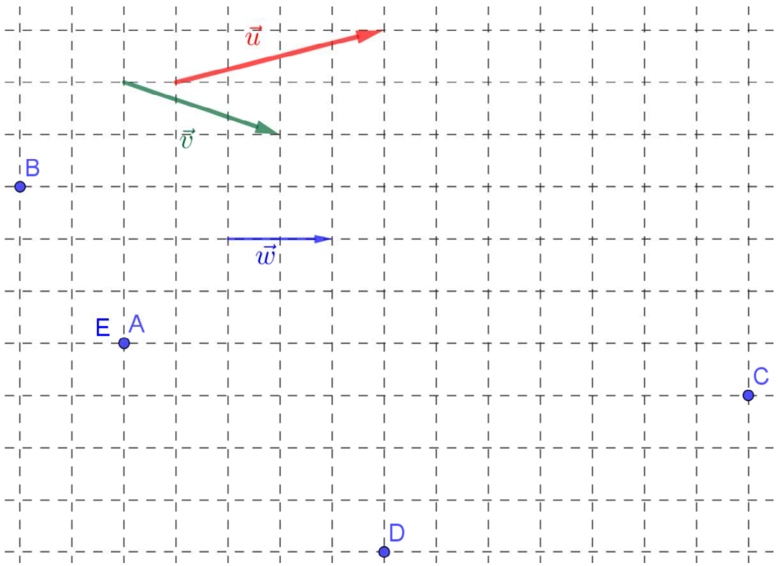
AP 2nde VECTEUR LE RETOUR k $\vec{u}$ 1 CORRIGÉ

Exercice 1 :



On peut faire une conjecture. Les points A et E sont confondus.
Démontrons cette conjecture :
D'après la relation de Chasles, on peut écrire :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
$= \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} + 4\vec{v} + - 2\vec{u} - \vec{w} + \vec{v} + \vec{u} - 3\vec{v}$
Et en additionnant tous ces vecteurs, on obtient : $\overrightarrow{AE} = \vec{0}$
Donc les points A et E sont bien confondus.

Exercice 2 : 1°) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ donc $3\vec{u}\begin{pmatrix}3\times2\\3\times(-4)\end{pmatrix}$ soit $3\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-12\end{pmatrix}$

$\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}2+2\times(-2)\\-4+2\times1\end{pmatrix}$ soit $\vec{u}+2\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

$-3\vec{u}-\vec{w}\begin{pmatrix}-3\times2-1\\-3\times(-4)-(-3)\end{pmatrix}$ soit $-3\vec{u}-\vec{w}\begin{pmatrix}-7\\15\end{pmatrix}$

2°) Soit $\vec{s}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Puisque $\vec{u} + \vec{s} = \vec{v}$, alors $\begin{cases}2+x=-2\\-4+y=1\end{cases}$ (si 2 vecteurs sont égaux, alors ils ont les mêmres coordonnées)

Donc $\begin{cases}x=-2-2=-4\\y=1+4=5\end{cases}$. Donc $\vec{s}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$

De même soit $\vec{t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Puisque $3\vec{u} + \vec{t} = 2\vec{w}$, alors $\begin{cases}3\times2+x=2\times1\\3\times(-4)+y=2\times(-3)\end{cases}$ Donc $\begin{cases}x=2-6=-4\\y=-6+12=6\end{cases}$. Donc $\vec{t}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$

Exercice 3 : 1°) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\1+1\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

2°) $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x_M-x_C\\y_M-y_C\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x_M-4\\y_M+2\end{pmatrix}$

(si 2 vecteurs sont égaux, alors ils ont les mêmres coordonnées)

Donc $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$ donc $\begin{cases}x_M-4=1\\y_M+2=2\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_M=1+4=5\\y_M=2-2=0\end{cases}$ donc M(5 ;0)

3°) $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x_N-x_B\\y_N-y_B\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x_N-3\\y_N-1\end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\times1\\2\times2\end{pmatrix}$ soit $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $\begin{cases}x_N-3=2\\y_N-1=4\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_N=2+3=5\\y_N=4+1=5\end{cases}$ donc N(5 ;5)

4°) $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}x_P-x_A\\y_P-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}x_P-2\\y_P+1\end{pmatrix}$ et $-3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\times1\\-3\times2\end{pmatrix}$ soit $-3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AB}$ donc $\begin{cases}x_P-2=-3\\y_P+1=-6\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_P=-3+2=-1\\y_P=-6-1=-7\end{cases}$ donc P(-1 ;-7)

Exercice 4 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-2\\5-3\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-2\\2-3\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$

2°) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2+2\times(-3)\\2+2\times(-1)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$

$2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\times2-3\times(-3)\\2\times2-3\times(-1)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}13\\7\end{pmatrix}$

Soit M(x ; y) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A\\y_M-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ = $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ donc $\begin{cases}x-2=-4\\y-3=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_M=-4+2=-2\\y_M=0+3=3\end{cases}$

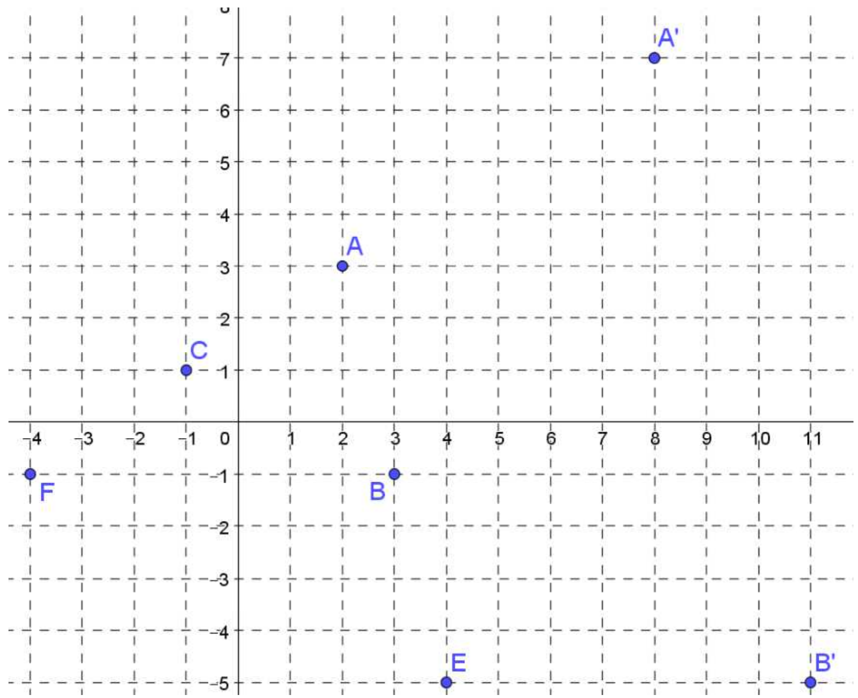
donc M(-2 ;3)

3°) Soit N(a ; b) $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}x_N-x_B\\y_N-y_B\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix}a-4\\b-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BN}$= $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc $\begin{cases}a-4=13\\b-5=7\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_M=13+4=17\\y_M=7+5=12\end{cases}$

donc N(17 ;12)

Exercice 5 :



1°)a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

b) D'après l'homothétie qui transforme A en A' et B en B', on a $\overrightarrow{A'B'}$ = 3 $\overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}3\times1\\3\times(-4)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}3\\-12\end{pmatrix}$

2°) La symétrie centrale de centre B transforme A en E. Donc $\overrightarrow{BE}$ = - $\overrightarrow{BA}$

Donc $\overrightarrow{BE}$ = $\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

3°) Le point F est l'image du point C par l'homothétie de centre A et de rapport 2. Donc $\overrightarrow{AF}$ = 2 $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_F-x_A\\y_F-y_A\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}x_F-2\\y_F-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ donc $2\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1+2\\2-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CF}$ = 2 $\overrightarrow{CA}$ donc $\begin{cases}x_F-2=-6\\y_F-3=-4\end{cases}$ donc $\begin{cases}x_F=-6+2=-4\\y_F=-4+3=-1\end{cases}$ donc F(-4 ; -1)

<u>Exercice 6</u> :

1°) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{EF}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, les droites (AB) et (EF) sont donc parallèles.
Le quadrilatère ABFE est donc un trapèze.

2°) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$. $x\,y' - x'y$ = 6×3 - 2 ×7=18 - 14 = 4$\neq 0$.

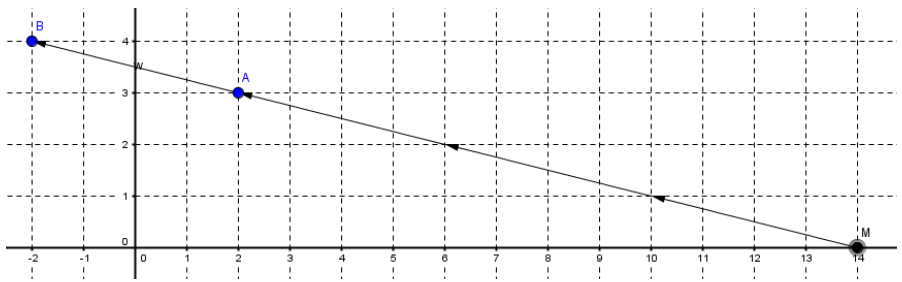
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont donc non colinéaires, les points A, B et G ne sont donc pas alignés.

<u>Exercice 7</u> :

1°) $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ soit I (0 ; 3,5) et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

2°) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. $xy' - x'y$ = - 4×1 - 1 ×(- 3) = - 4 + 3 = - 1$\neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont non colinéaires.

3°)



4°) $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}2-x_M\\3-y_M\end{pmatrix}$ et $3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-12\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{AB}$ On a donc $\begin{cases}2-x_M=-12\\3-y_M=3\end{cases}$,

$\begin{cases}-x_M=-12-2=-14\\-y_M=3-3=0\end{cases}$ Ainsi M (14 ; 0)

<u>Exercice 8</u> :

1°) a) $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$ $\overrightarrow{AB}\binom{5-3}{-4-8}$ $\overrightarrow{AB}\binom{2}{-12}$

$\overrightarrow{CD}\binom{x_D-x_C}{y_D-y_C}$ $\overrightarrow{CD}\binom{3-5}{1-9}$ $\overrightarrow{CD}\binom{-2}{-8}$

b) x.y' – x'.y = 2 (-8) – (-2)(-12) = -16-24 = -40 ≠ 0.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, donc (AB)$\nparallel$(CD)

2°) A, B et E sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\binom{2}{-12}$ et $\overrightarrow{AE}\binom{0-3}{26-8}$ $\overrightarrow{AE}\binom{-3}{18}$

$x.y' - x'.y$ = 2 × 18 – (-12)(-3) =36 – 36 = 0.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires. Donc les points A, B et E sont alignés.

<u>Exercice 9</u> :

1°) a)AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ = $\sqrt{(2+2)^2+(-1-5)^2}$ = $\sqrt{16+36}$ = $\sqrt{52}$

AC = $\sqrt{(5+2)^2+(1-5)^2}$ = $\sqrt{49+16}$ = $\sqrt{65}$

b) BC = $\sqrt{13}$. D'une part, on a $AC^2 = \sqrt{65}^{\,2} = 65$ et

d'autre part on a $AB^2 + BC^2 = \sqrt{52}^{\,2} + \sqrt{13}^{\,2}$ = 52 + 13 = 65

Donc $AB^2 + BC^2 = AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

2°) F milieu de [AB], donc F($\frac{x_A+x_B}{2}$; $\frac{y_A+y_B}{2}$) , F($\frac{-2+2}{2}$; $\frac{5-1}{2}$) donc F(0 ; 2)

3°) E est symétrique de C par rapport à B , donc B est milieu de [EC]

Donc B($\frac{x_E+5}{2}$; $\frac{y_E+1}{2}$) et B(2 ; -1)

Donc $\begin{cases} \frac{x_E+5}{2} = 2 \\ \frac{y_E+1}{2} = -1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_E + 5 = 4 \\ y_E + 1 = -2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_E = 4 - 5 = -1 \\ y_E = -2 - 1 = -3 \end{cases}$

donc E(-1 ; -3)

4°) $\overrightarrow{AH}\binom{2+2}{25-5}$ $\overrightarrow{AH}\binom{4}{20}$

$\overrightarrow{BG}\binom{4-2}{9+1}$ $\overrightarrow{BG}\binom{2}{10}$

On remarque que $2\overrightarrow{BG}\binom{2\times2}{2\times10}$ donc $2\overrightarrow{BG}\binom{4}{20}$ donc $2\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$

Donc $\overrightarrow{AH}$ *et* $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires, donc (AH) ∥ (BG)

<u>Exercice 10</u> :

1°) $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$ $\overrightarrow{AB}\binom{15-0}{-59-1}$ $\overrightarrow{AB}\binom{15}{-60}$ donc $2\overrightarrow{AB}\binom{2\times15}{2\times(-60)}$ $2\overrightarrow{AB}\binom{30}{-120}$

et $\overrightarrow{MA}\binom{x_A-x_M}{y_A-y_M}$ $\overrightarrow{AM}\binom{0-x_M}{1-y_M}$

Comme $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$, alors $\begin{cases} -x_M = 30 \\ 1 - y_M = -120 \end{cases}$

et donc $\begin{cases} x_M = -30 \\ y_M = 1 + 120 = 121 \end{cases}$ Donc M(-30 ; 121)

2°) $\overrightarrow{AB}\binom{15}{-60}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{-12-0}{49-1}$ $\overrightarrow{AC}\binom{-12}{48}$

$x.y' - x'.y$ = 15 × 48 – (-12)(-60) =720 – 720 = 0. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Donc les points A, B et C sont alignés.

3°) $\overrightarrow{AB}$ = -1,25$\overrightarrow{AC}$ car$\begin{cases} -1{,}25 \times (-12) = 15 \\ -1{,}25 \times 48 = -60 \end{cases}$

k = -1,25

4°) $\overrightarrow{AB}\binom{15}{-60}$ et $\overrightarrow{AD}\binom{x-0}{15-1}$ $\overrightarrow{AD}\binom{x}{14}$.

Les points A, B et D sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires

⇔ x.y' – x'.y = 0 ⇔ 15 × 14 - (-60) x = 0 ⇔ 210 + 60 x = 0

⇔ x = - $\frac{-210}{60}$ = -3,5

Les points A, B et D sont alignés si et seulement x = -3,5

<u>Exercice 11</u> : Approfondissement

L'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$ transforme B en I et D en J, donc

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

La symétrie de centre C transforme B en K et D en L,
donc $\overrightarrow{CK}$ = - $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CL}$ = - $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{KL}$ = - $\overrightarrow{BD}$

Puisque $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ alors $\overrightarrow{BD}$ = 3$\overrightarrow{IJ}$ et comme $\overrightarrow{KL}$ = - $\overrightarrow{BD}$, alors $\overrightarrow{KL}$ = - 3$\overrightarrow{IJ}$
On peut donc affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires et donc que les droites (IJ) et KL sont parallèles