AP 1ère ES – L **Applications de la dérivation 3**

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer le tableau de variations des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$
2) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 12$
3) $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 3x + 3$
4) $f(x) = 0{,}25x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 0{,}5x^2 - 1$
5) $f(x) = -0{,}25x^4 + 8x^2$
6) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x + 2}$, D$f$ = IR – {– 1}
7) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$, D$f$ = IR – {1}

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = 32x^3 + 36x^2 + 12x$ sur IR.

1) Conjecturer par lecture graphique le sens de variation de f.
2) Prouver votre conjecture.

Exercice 3 :

Pour un produit donné, le coût C, en milliers d'euros, en fonction du nombre x de pièces produites, est donné par :
$C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}135x^2 + 0{,}6x + 15$, pour x compris entre 0 et 30.
Chaque pièce est vendue 2,7 milliers d'euros.

1) Pour 10 pièces produites et vendues, calculer le coût de fabrication, le prix de vente et le bénéfice réalisé.
2) ***a***) Exprimer, en milliers d'euros, le prix de vente P(x) pour x pièces vendues.

   b) Représenter sur la calculatrice les courbes des fonctions C et P.

   c) Conjecturer graphiquement la quantité x de pièces à produire et à vendre pour que le bénéfice soit maximal.
3) ***a***) Déterminer l'expression du bénéfice B(x).

   b) Etudier les variations de B sur [0 ; 30].

   c) Quelle production assure un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice ?

Exercice 4 :

Dans un restaurant, le coût total en euros pour la fabrication de x repas est donné par la relation : $C(x) = 2x^2 - 230x + 7200$ pour x compris entre 30 et 120.
Lorsque x repas sont fabriqués, on appelle coût moyen d'un repas le quotient CM(x) = $\dfrac{C(x)}{x}$.

1) Donner l'expression de CM(x).
2) ***a***) Calculer CM'(x).

   b) Etudier le sens de variation de CM sur [30 ; 120].
3) Combien de repas faut-il fabriquer pour que le coût moyen d'un repas soit minimal ?

AP 1ère ES – L **Applications de la dérivation 3**

Exercice 1 :

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, on a $\Delta = 36$ et $x_1 = 1$ $x_2 = 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	7	↘	3	↗	

2) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 12$

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$, on a $\Delta = 324$ et $x_1 = 2$ $x_2 = -1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-19	↗	8	↘	

3) $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 3x + 3$

$f'(x) = -3x^2 - 6x - 3$, on a $\Delta = 0$ et $x_1 = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		↘	4	↘	

4) $f(x) = 0{,}25x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 0{,}5x^2 - 1$

$f'(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1)$,

on a $x = 0$ ou $x^2 - 2x + 1 = 0$ $\Delta = 0$ et $x_1 = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x^2 - 2x + 1$		$+$	|	$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	$-\frac{11}{12}$	↗	

5) $f(x) = -0{,}25x^4 + 8x^2$

$f'(x) = -x^3 + 16x = x(-x^2 + 16)$,

on a $x = 0$ ou $-x^2 + 16 = 0$ $\Delta = 64$ et $x_1 = -4$ $x_2 = 4$

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
x		$- -$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x^2 + 16$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	64	↘	0	↗	64	↘	

6) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{2x + 2}$, D$f$ = IR – {–1}

$f'(x) = \dfrac{4x^2 + 8x}{(2x+2)^2}$ $4x^2 + 8x = 0$ $\Delta = 64$ et $x_1 = -2$ $x_2 = 0$

Et $(2x + 2)^2 = 0$ pour $x = -1$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$4x^2 + 8x$		+	0	–	||	–	0	+	
$(2x + 2)^2$		+	|	+	||	+	|	+	
$f'(x)$		+	0	–	||	–	0	+	
$f(x)$		↗	– 4,5	↘		↘	– 0,5	↗	

7) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$, D$f$ = IR – {1}

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ $x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Delta = 16$ et $x_1 = -1$ $x_2 = 3$

Et $(x - 1)^2 = 0$ pour $x = 1$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		+	0	–	||	–	0	+	
$(x - 1)^2$		+	|	+	||	+	|	+	
$f'(x)$		+	0	–	||	–	0	+	
$f(x)$		↗	0	↘		↘	8	↗	

<u>Exercice 2</u> :

On considère la fonction f définie par $f(x) = 32x^3 + 36x^2 + 12x$ sur IR.

1) f semble croissante sur IR.

2) $f'(x) = 96x^2 + 72x + 12$

on a $\Delta = 576$ et $x_1 = -0,5$ $x_2 = -0,25$

x	$-\infty$		$-0,5$		$-0,25$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$		↗	– 1	↘	– 1,25	↗	

<u>Exercice 3</u> :

Pour un produit donné, le coût C, en milliers d'euros, en fonction du nombre x de pièces produites, est donné par :
$C(x) = 0,01x^3 - 0,135x^2 + 0,6x + 15$, pour x compris entre 0 et 30.
Chaque pièce est vendue 2,7 milliers d'euros.

1) Pour 10 pièces produites, le coût est de C(10) = 17,5 (soit 17500€), le prix de vente est 27 000 € et le bénéfice réalisé est de

27000 – 17500 = 9500

2) ***a)*** $P(x) = 2,7x$.

b) cf calculatrice.

c) La quantité x de pièces à produire et à vendre pour que le bénéfice soit maximal (plus grand écart entre les deux courbes) est de :

3) ***a)*** $B(x) = P(x) - C(x) = 2,7x - 0,01x^3 + 0,135x^2 - 0,6x - 15$

$B(x) = -0,01x^3 + 0,135x^2 + 2,1x - 15$

b)

$B'(x) = -0{,}03x^2 + 0{,}27x + 2{,}1$

on a $\Delta = 0{,}3249$ et $x_1 = -5$ $x_2 = 14$

x	0		14		30
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	– 15	↗	13,42	↘	– 100,5

c) La production qui assure un bénéfice maximal est 14 produit. Ce bénéfice est de 13420 €.

<u>Exercice 4</u> :

1) $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{2x^2 - 230x + 7200}{x}$

2)

a) $CM'(x) = \dfrac{2x^2 - 7200}{x^2}$.

.b) $2x^2 - 7200$: on a $\Delta = 0{,}3249$ et $x_1 = -60$ $x_2 = 60$

x	30		60		120
$2x^2 - 7200$		–	0	+	
x^2		+	|	+	
$f'(x)$		–	0	+	
$f(x)$	70	↘	10	↗	70

3) Il faut fabriquer 60 repas pour avoir un coût moyen minimal pour un repas de 10 €.