TS — AP LIMITES et variations de fcts polynômes / rationnelles

Ex 1 : 1°) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\left(3 - \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x} - 1} = -\infty$ par quotient

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -1$

ou : La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-3x) = -\infty$

* De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

* $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ par quotient car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} (3x^2 - 5x + 1) = 3 - 5 + 1 = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (1 - x) = 0^- \end{cases}$

car

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

De même $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 1^-} (1 - x) = 0^+$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2°) a) $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{-3, 1\} =]-\infty, -3[\cup]-3, 1[\cup]1, +\infty[$ car $x^2 + 2x - 3 = 0$ admet 2 solutions $x_1 = -3$ $x_2 = 1$; $\Delta = 16 > 0$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + \frac{1}{x}}{x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = 0$ par quotient

car $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$

De m $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

Donc $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

* $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = +\infty$ par quotient car $\lim\limits_{x \to 1^+} 2x + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

et $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2 + 2x - 3 = 0^+$

car

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

De m $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -\infty$

* $\lim\limits_{x \to -3^+} g(x) = +\infty$ par quotient car $\lim\limits_{x \to -3^+} 2x + 1 = 2(-3) + 1 = -5$

et $\lim\limits_{x \to -3^+} x^2 + 2x - 3 = 0^-$ $(\nearrow)$

De m $\lim\limits_{x \to -3^-} g(x) = -\infty$

Donc $\mathcal{C}_g$ admet 2 asymptotes verticales d'équation $x = -3$ et $x = 1$

b) $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ par somme car $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -4x = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = FI = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2\left(-2 - \frac{4}{x} + \frac{\sqrt{5}}{x^2}\right) = -\infty$ par produit car $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2 - \frac{4}{x} - \frac{\sqrt{5}}{x^2}\right) = -$

__2__ 1°) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 7 \qquad D_f = \mathbb{R}$

+ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right) = -\infty$ par produit

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3} = 1$

De même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

× f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fct polynôme. Pour tout x réel $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$\Delta = -24$ d'où

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

→ du signe de a

2°) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x^2+x}$ sur $]0 ; +\infty[$

× $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-3x}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(\frac{1}{x} - 3\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x} - 3}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 0$ par quotient

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - 3 = -3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$ par produit

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1-3x}{x^2+x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - 3x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + x = 0^+$ car

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x^2+x = x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{C}_f$ admet 1 asymptote horizontale d'équation $y = 0$
et 1 verticale d'équation $x = 0$

+ f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme fct rationnelle définie sur $]0 ; +\infty[$

Pour $\forall x > 0 \quad f'(x) = \dfrac{-3(x^2+x) - (2x+1)(1-3x)}{(x^2+x)^2} = \dfrac{-3x^2 - \cancel{3x} - 2x + 6x^2 - 1 + \cancel{3x}}{(x^2+x)^2} = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{(x^2+x)^2}$

$\Delta = 16 \quad x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = 1$

x	0		1		$+\infty$
← $3x^2 - 2x - 1$		$-$	0	$+$	
$(x^2+x)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

$f(1) = \dfrac{1-3}{1+1} = \dfrac{-2}{2} = -1$

__Ex 3__ $\quad f(x) = \dfrac{-2x^2 + 7x - 8}{x - 2} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

1°) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2\left(-2 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\left(-2 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2}\right)}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty$ par produit et quotient

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} -2 + \frac{7}{x} - \frac{8}{x^2} = -2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \frac{2}{x} = 1$

De même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2°) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2} -2x^2+7x-8 = -8+14-8 = -2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x-2 = 0^+ \end{cases}$ car

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

De même $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

Donc $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=2$

3°) f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{2\}$ comme fct rationnelle

Pour tout $x \neq 2$ $f'(x) = \dfrac{(-4x+7)(x-2) - 1(-2x^2+7x-8)}{(x-2)^2} = \dfrac{-4x^2+8x+7x-14+2x^2-7x+8}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{-2x^2+8x-6}{(x-2)^2} \longrightarrow \Delta = 16>0 : x_1 = 3 \quad x_2 = 1$

$\longrightarrow (x-2)^2 \; +$ $\longrightarrow$ Donc $f'(x)$ est donc du même signe que $-2x^2+8x-6$ (du signe de a à l'extérieur des racines)

Donc

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$

4°) Etudions le signe de $f(x) - (-2x+3)$

Pour tout $x \neq 2$ $f(x) - (-2x+3) = \dfrac{-2x^2+7x-8-(-2x+3)(x-2)}{x-2} = \dfrac{-2x^2+7x-8+2x^2-4x-3x+6}{x-2}$

$= \dfrac{-2}{x-2} \longrightarrow$ du signe opposé de celui de $x-2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe $f(x)-(-2x+3)$	$+$	||	$-$
Position	$\mathcal{C}_f$ est donc au dessus de Δ	||	$\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ

5°) $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$T_0 : y = -\frac{3}{2}x + 4$

Ex 4 1) a) quand x est proche de 3, $f(x)$ semble proche de 0,3. Dans le tableau de valeurs on voit que 3 n'a pas d'image

b) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ FI (de la forme $\frac{0}{0}$)

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{3-1}{3+3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ $\quad (\frac{1}{3} \approx 0{,}3)$

car x^2-4x+3 : $\Delta=4$, $x_1=1$, $x_2=3$ $\longrightarrow$ car $x\neq 3$

$\hookrightarrow = 1(x-1)(x-3)$

2°) * $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ car en l'infini une fct rationnelle a même limite que le quotient des monômes de plus haut degré.

De même $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$

* $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to -3} (x^2-4x+3) = 9+12+3 = 24$

et $\lim\limits_{x\to -3^-} (x^2-9) = 0^+$

et de même $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$

car

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-3$