TS AP : Exercice Bac probabilités conditionnelles, loi binomiale, variable aléatoire

Ex 1 : Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :
M l'évènement : «l'animal est porteur de la maladie» ;
T l'évènement : «le test est positif».
1°) Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2°) Un animal est choisi au hasard.
a) Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
b) Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3°) Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4°) On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

5°) Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
On note C la variable aléatoire qui donne le coût pour un animal.
a) Déterminer la loi de probabilité de C.

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

c) Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Ex 2 : Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune.
La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.
Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.
La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 € et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1°) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2°) Soient E et F les évènements :
E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;
F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».
Montrer que p(E)= 0,02 et p(F) = 0,17.

3°) Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.
X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel : le joueur mise 1 €).
a)Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4°) a) Calculer la probabilité d'obtenir une case rouge au deuxième lancer.
b) Le joueur a obtenu une case rouge au deuxième lancer : quelle est la probabilité que le joueur ait aussi obtenu une case rouge au premier lancer ?

5°) Le joueur décide maintenant de jouer 10 parties consécutives et indépendantes.
a) Calculer la probabilité d'obtenir 7 fois l'événement E.
b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins 5 fois l'événement E.
c) Calculer la probabilité d'obtenir au plus 3 fois l'événement E.

6°) Le joueur décide maintenant de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)
a)Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que : $p_n = 1 - (0,9)^n$.
b) Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.
c) Écrire un algorithme permettant de déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$.