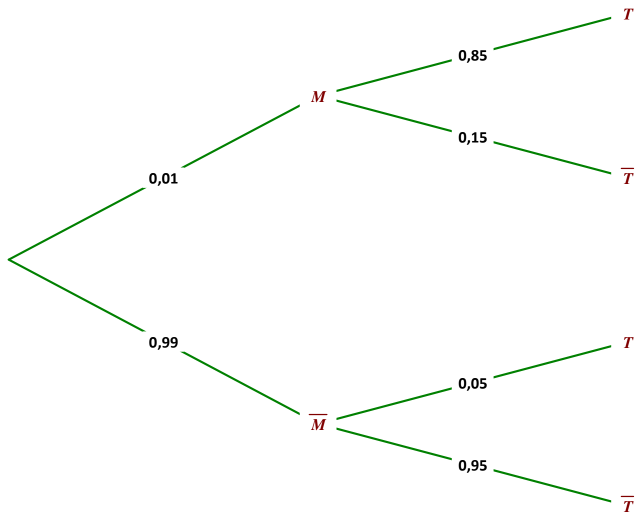
Corrigé ex Bac probabilités conditionnelles loi binomiale variable aléatoire

Exercice 1 :

L'énoncé donne : p(M) =0,01 ; p_M(T) = 0,85 et $p_{\overline{M}}(\overline{T})$ = 0,95

D'où l'arbre pondéré :



2°)a) p(T ∩ M) = p_M(T) × p(M) = 0,85 × 0,01 = 0,0085

b) D'après la formule des probabilités totales :

p(T) = p(T ∩ M) + p(T ∩ $\overline{M}$) = 0,0085 + 0,05 × 0,99 = 0,058

3°) $p_T(M) = \frac{p(M\cap T)}{p(T)} = \frac{0,0085}{0,058} = \frac{17}{116} \simeq 0,1466$

4°) a) Considérons l'épreuve de Bernoulli : on prend au hasard un animal,
comme succès : le test est positif de probabilité p = 0,058.
On répète 5 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
X, qui compte le nombre de succès, suit la loi binomiale B(5 ; 0,058).

b) C'est p(X ≥ 1) = 1 – p(X = 0) ≃ 0,2583 à la calculatrice.

5°) a) p(*C* = 1000) = p($\overline{T} \cap M$) = 0,01 × 0,15 = 0,0015

P(*C* = 100) = p(T) = 0,058

P(*C* = 0) = p($\overline{T} \cap \overline{M}$) = 0,99 ×0,95 = 0,9405 Rq : la somme des 3 probabilités fait 1 !

En résumé :

c_i	0	100	1000
p_i	0,9405	0,058	0,0015

b) L'espérance de *C* vaut : E(*C*) = 0 × 0,9405 + 100 × 0,058 + 1000 × 0,0015 = 7,3

c) D'après b), en moyenne, le coût pour un animal est de 7,3€, donc pour 200 bêtes, il faudra prévoir un coût de 7,3 × 200 = 1460€.

Exercice 2 :

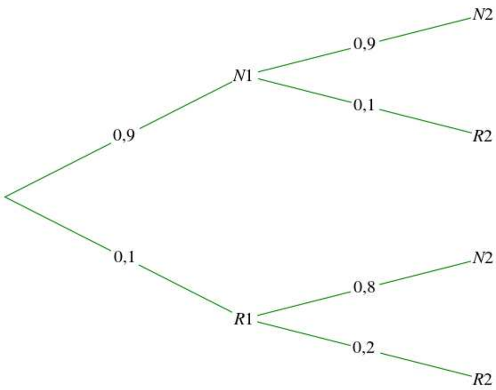
On va considérer les événements : N_i : la roue tombe sur N au $i^{ème}$ lancer et R_i : la roue tombe sur R au $i^{ème}$ lancer.

Au 1er lancer, on lance A, donc p(R_1) = $\frac{2}{20}$ = 0,1 et p(N_1) = $\frac{18}{20}$ = 0,9

Au 2ème lancer : si R_1 : on lance B donc p_{R_1}(R_2) = $\frac{4}{20}$ = 0,2 et p_{R_1}(N_2) = 0,8

et si N_1 : on relance A donc p_{N_1}(R_2) = $\frac{2}{20}$ = 0,1 et p_{N_1}(N_2) = 0,9

D'où l'arbre pondéré :



2°) p(E) = p($R_1 \cap R_2$) = 0,1 × 0,2 = 0,02

P(F) = p($R_1 \cap N_2$) + p($N_1 \cap R_2$) = 0,1 × 0,8 + 0,9 × 0,1 = 0,17

3°) a) X prend les valeurs 10-1 = 9€ , 2-1 = 1€ et 0-1 = -1€ (en tenant compte de la mise)

P(X = 9) = p(E) = p($R_1 \cap R_2$) = 0,02

P(X = 1) = p(F) = 0,17 et p(X = -1) = p($N_1 \cap N_2$) = 0,9 × 0,9 = 0,81

D'où la loi de probabilité :

x_i	-1	1	9
p_i	0,81	0,17	0,02

b) E(X) = -1 × 0,81 + 1 × 0,17 + 9 × 0,02 = -0,46.

En moyenne à ce jeu, un joueur perd 0,46€ par partie. Ce jeu est donc désavantageux pour le joueur.

4°) a) D'après la formule des probabilités totales :

$P(R_2) = p(R_1 \cap R_2) + p(N_1 \cap R_2) = 0{,}02 + 0{,}09 = 0{,}11$

b) $p_{R_2}(R_1) = \frac{p(R_1 \cap R_2)}{p(R_2)} = \frac{0{,}02}{0{,}11} = \frac{2}{11}$

5°) Considérons l'épreuve de Bernoulli : le joueur joue une partie
comme succès : l'événement E est réalisé (les 2 cases sont rouges) de probabilité p = 0,02.
On répète 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
X, qui compte le nombre de succès, suit la loi binomiale B(10 ; 0,02).

a) $P(X = 7) \simeq 1{,}44 \times 10^{-10}$.

b) $P(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) \simeq 7{,}4 \times 10^{-7}$.

c) $P(X \leq 3) \simeq 0{,}99997$

6°) a) Tourner une seule fois la roue B, c'est R_1.

Considérons l'épreuve de Bernoulli : le joueur lance la roue A
comme succès : il obtient une case rouge (pour lancer la roue B) de probabilité p = 0,1.
On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
X, qui compte le nombre de succès, suit la loi binomiale B(n ; 0,1).
On cherche $p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = 1 - 0{,}9^n$.

b) La suite (p_n) est convergente car $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - 0{,}9^n = 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ car $-1 < 0{,}9 < 1$.

Donc la suite (p_n) converge vers 1.

c)

```
n entier, p réel
n prend la valeur 0
p prend la valeur 0
Tant que p ≤ 0,9
    n prend la valeur n+1
    p prend la valeur 1 – 0,9^n
FinTantque
Afficher n
```

Traduit en Algobox :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  p PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (p<=0.9) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    p PREND_LA_VALEUR 1-pow(0.9,n)
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "La plus petite valeur de l'entier n pour laquelle pn>0,9 est : "
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

et sur TI

```
PROGRAM:SEUIL
:0→N
:0→P
:While P≤0.9
:N+1→N
:1-.9^N→P
:End
:Disp N
```

Exécution :

```
***Algorithme lancé***
La plus petite valeur de l'entier n pour laquelle pn>0,9 est : 22
***Algorithme terminé***
```