Ex 5 $\quad f(x) = \frac{2x+1}{x+1} \quad D_f = [0;2]$

1°) f est dérivable sur $[0;2]$ comme fct rationnelle

$f'(x) = \frac{2(x+1)-1(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ d'où

| $x$ | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f$ | $\frac{3}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{3}$ |

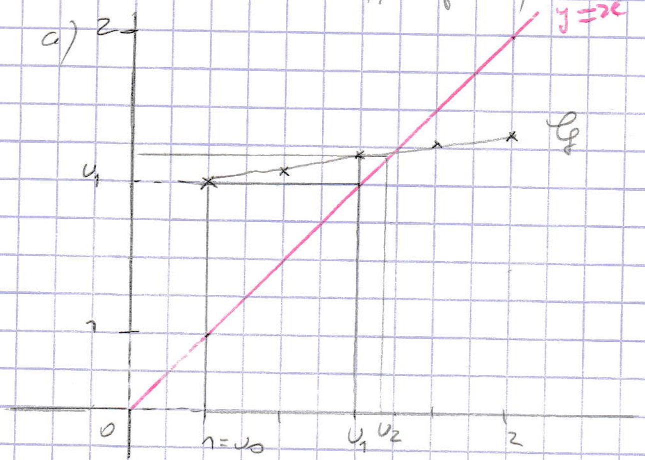
$f(1) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \qquad f(2) = \frac{5}{3}$

D'après le tableau de variations de f si $1 \le x \le 2$ alors $\frac{3}{2} \le f(x) \le \frac{5}{3}$

or $1 < \frac{3}{2}$ et $\frac{5}{3} < 2$ donc $1 \le f(x) \le 2$

2°) $u_0 = 1 \qquad u_{n+1} = f(u_n)$

a)




$u_1 = f(u_0)$

$u_2 = f(u_1)$

$u_3 = f(u_2)$

$(u_n)$ semble croissante et convergente (vers $\approx$ 1,6 / 1,7)

b) Par récurrence : $\quad P_n : 1 \le u_n \le 2$

* $n = 0 \quad u_0 = 1 \in [1;2]$

* Supp pour 1 certaine valeur de n $1 \le u_n \le 2$, dém $1 \le u_{n+1} \le 2$

or si $x \in [1;2]$ $f(x) \in [1;2]$ donc puisque par hyp de réc $u_n \in [1;2]$

alors $f(u_n) \in [1;2]$ donc $u_{n+1} \in [1;2]$

* D'après l'axiome de réc : $u_n \in [1;2]$ pour tt $n \in \mathbb{N}$

c) Pr tt $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+1}{u_n+1} - u_n = \frac{2u_n+1-u_n^2-u_n}{u_n+1}$

$= \frac{-u_n^2+u_n+1}{u_n+1}$ ~~se~~ factoriser en $-\frac{\left(u_n - \frac{-1-\sqrt{5}}{-2}\right)\left(u_n - \frac{-1+\sqrt{5}}{-2}\right)}{u_n+1}$

$= -\frac{\left(u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(u_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{u_n+1}$

OU par récurrence $\quad P_n : u_n \le u_{n+1}$

* $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{3}{2}$ donc $u_1 > u_0$ $\quad P_0$ vraie

* Supp. pour 1 certaine val de n $\quad u_n \le u_{n+1}$, dém $u_{n+1} \le u_{n+2}$

or f est $\nearrow$ sur $[1;2]$ et $u_n \in [1;2]$ donc si $u_n \le u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \le f(u_{n+1})$
$u_{n+1} \in [1;2]$ soit $u_{n+1} \le u_{n+2}$

* D'après l'axiome de réc. $u_n \le u_{n+1}$ pour tt n donc $(u_n)$ est croissante

d) $(U_n)$ est donc croissante et majorée (par 2) donc convergente.

On peut trouver sa limite avec $\lim_{n \to +\infty} U_n = l$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

et $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = l$

D'où $l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{2l+1}{l+1} \Leftrightarrow l^2 + l = 2l + 1 \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0$

$\Delta = 5$ $\quad l_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0{,}618$ $\quad l_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$

$\hookrightarrow$ impossible car $1 \leq U_n \leq 2$.

Donc $(U_n)$ convergente vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$.

## Ex 6

1°) FAUX

Rq si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente mais on ne connaît pas sa limite

Ctre exple : $U_n = 4 - \frac{1}{n}$ $\quad (U_n) \nearrow$ car $\left(\frac{1}{n}\right) \searrow$

et $(U_n)$ majorée par 5 car pour tout $n$ $U_n \leq 4$ donc $U_n \leq 5$

or $\lim_{n \to +\infty} U_n = 4$

2°) FAUX

Ctre exple $U_n = (-1)^n$

$(U_n)$ n'a pas de limite donc n'est pas convergente et pourtant $-1 \leq U_n \leq 1$

3°) FAUX

Ctre exple : $U_n = 2 + \frac{1}{n}$ $\qquad$ Même rq que dans 1°)

$\left.\begin{array}{l}(U_n) \searrow \\ U_n > 0\end{array}\right\}$ $(U_n) \searrow$ et minorée donc convergente

Mais $\lim_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$