TS — AP Théor de convergence

Ex 1 On sait que U est borné par -1 et 2 donc pour $\forall n \in \mathbb{N}$ $-1 \leq U_n \leq 2$

1°) Pr $\forall n \in \mathbb{N}$ $-1 \leq U_n \leq 2$ (+2)

$\Rightarrow -1+2 \leq U_n+2 \leq 2+2$

$\Rightarrow 1 \leq U_n+2 \leq 4$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{U_n+2} \leq 1$ — on applique la fct inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$\Rightarrow -2 \leq \frac{-2}{U_n+2} \leq \frac{-2}{4}$ — on multiplie par -2 qui est ⊖

$\Rightarrow -2+1 \leq V_n \leq 1-\frac{1}{2}$ (+1)

$\Rightarrow -1 \leq V_n \leq \frac{1}{2}$ donc la suite V est bornée (par -1 et $\frac{1}{2}$)

2°) Si U est décroissante alors

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \leq U_n$ (+2)

$\Rightarrow U_{n+1}+2 \leq U_n+2$

$\Rightarrow \frac{1}{U_n+2} \leq \frac{1}{U_{n+1}+2}$ — fct inverse ↘ dans $\mathbb{R}^{+*}$ car $-1 \leq U_n \leq 2$, $1 \leq \underbrace{U_n+2}_{\text{donc } \oplus} \leq 4$

$\Rightarrow \frac{-2}{U_{n+1}+2} \leq \frac{-2}{U_n+2}$ $\times(-2)$

$\Rightarrow V_{n+1} \leq V_n$ (+1)

donc la suite V est décroissante

3°) De m̂ si U est croissante, on démontrerait que V est croissante

Dans ces 2 cas, on aurait soit V croissante et majorée (par $\frac{1}{2}$) donc convergente

soit V décroissante et minorée (par -1) donc convergente

Mais U ne peut être ni croissante ni décroissante, dans ce cas il en serait de m̂ pour V et alors V ne serait pas convergente. — or on ne sait pas pour V

Ex 2 $U_0 = 5$ $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 12}$

1°) Par récurrence : $P_n : U_n \geq 4$

* pour $n = 0$ $U_0 = 5$ donc $U_0 \geq 4$ donc P_0 est vraie
* Supposons que pour une certaine valeur de n P_n soit vraie (càd $U_n \geq 4$), démontrons que P_{n+1} est vraie (càd $U_{n+1} \geq 4$)

Par hyp. $U_n \geq 4 \xrightarrow{+12} U_n + 12 \geq 16 \Rightarrow \sqrt{U_n+12} \geq \sqrt{16} \Rightarrow U_{n+1} \geq 4$

(la fct racine est ↗ sur $\mathbb{R}^{+*}$)

* D'après l'axiome de récurrence : pour $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \geq 4$

2) Pour $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n + 12} - U_n = \dfrac{(\sqrt{U_n+12} - U_n)(\sqrt{U_n+12} + U_n)}{\sqrt{U_n+12} + U_n}$

$$= \frac{U_n + 12 - U_n^2}{\sqrt{U_n+12} + U_n}$$

or $\quad x + 12 - x^2 = -x^2 + x + 12 = -(x-4)(x+3) = (4-x)(x+3)$

car $\Delta = 49$
$x_1 = 4 \quad x_2 = -3$ $\qquad$ donc $\quad U_n + 12 - U_n^2 = (4 - U_n)(U_n + 3)$

Donc $\quad U_{n+1} - U_n = \dfrac{(4 - U_n)(U_n + 3)}{\sqrt{U_n+12} + U_n}$ $\qquad$ comme $U_n \geq 4 \Rightarrow U_n + 3 \geq 7 \geq 0$

et $4 - U_n \leq 0$

et $\left.\begin{array}{l}\sqrt{U_n+12} > 0 \\ U_n > 0\end{array}\right\}$ d'où $\sqrt{U_n+12} + U_n > 0$

donc $\quad U_{n+1} - U_n \leq 0 \quad$ donc (U_n) est décroissante

Se démontrerait par récurrence

3°) Comme (U_n) est minorée (par 4) et décroissante

Alors (U_n) est convergente.

⚠ On ne connait pas la limite.

Ex 3 $\qquad U_1 = -1 \qquad U_{n+1} = \dfrac{n U_n + 3n + 6}{2(n+1)}$

1°) a) Par récurrence : $\qquad$ Soit $U_n \leq 3 : P_n$

* P_1 est vraie car $U_1 = -1 \leq 3$
* Supp. P_n vraie pour 1 certaine valeur de n (càd $U_n \leq 3$), dém. que P_{n+1} vraie (càd $U_{n+1} \leq 3$)

or par hyp $U_n \leq 3 \Rightarrow n U_n \leq 3n \Rightarrow n U_n + 3n \leq 6n \Rightarrow n U_n + 3n + 6 \leq 6n + 6$

or $2(n+1) > 0$ donc $\dfrac{n U_n + 3n + 6}{2(n+1)} \leq \dfrac{6n + 6}{2(n+1)}$ soit $U_{n+1} \leq \dfrac{6(n+1)}{2(n+1)}$

soit $U_{n+1} \leq 3$ donc P_{n+1} est vraie

* D'après l'axiome de récurrence pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \leq 3$

b) Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad U_{n+1} - U_n = \dfrac{n U_n + 3n + 6}{2(n+1)} - \dfrac{2(n+1) U_n}{2(n+1)}$

$$= \frac{n U_n + 3n + 6 - 2n U_n - 2U_n}{2(n+1)} = \frac{-n U_n - 2U_n + 3n + 6}{2(n+1)}$$

$$= \frac{-U_n(n+2) + 3(n+2)}{2(n+1)} = \frac{(n+2)(3 - U_n)}{2(n+1)} \geq 0$$

car pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on sait $U_n \leq 3 \Rightarrow 3 - U_n \geq 0$ et $n+2 > 0$
$n+1 > 0$

donc (U_n) est croissante.

c) (U_n) est alors croissante et majorée donc convergente ⚠ on ne connait pas la limite.

2°) $V_n = n(3 - U_n)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad V_{n+1} = (n+1)(3 - U_{n+1}) = (n+1)\left(3 - \frac{nU_n + 3n + 6}{2(n+1)}\right)$

$= \cancel{(n+1)} \frac{6(n+1) - nU_n - 3n - 6}{2\cancel{(n+1)}} = \frac{1}{2}(6n + \cancel{6} - nU_n - 3n - \cancel{6})$

$= \frac{1}{2}(3n - nU_n) = \frac{1}{2} n(3 - U_n) = \frac{1}{2} V_n$

Donc (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et le 1er terme $V_1 = 1(3 - U_1) = 3 + 1 = 4$

b) Donc $V_n = V_1 \cdot q^{n-1} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

donc comme $V_n = n(3 - U_n) \iff V_n = 3n - nU_n \iff U_n = \frac{3n - V_n}{n} = 3 - \frac{V_n}{n}$

alors $U_n = 3 - \frac{4}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 - \frac{4}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = 3 - \frac{8}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $q = \frac{1}{2} \in]-1;1[$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{8}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3$

Ex 4 $\quad U_0 = 1 \quad U_{n+1} = 2U_n + 3$

1°) a) Par récurrence : $\quad P_n : U_n > 0$

* Pour $n = 0 \quad U_0 = 1 > 0 \quad$ donc P_0 vraie

* Supposons que pour une certaine valeur de n $\; U_n > 0$, dém. que $U_{n+1} > 0$

or $U_n > 0$ (hyp réc) $\Rightarrow 2U_n + 3 > 2 \times 0 + 3 \Rightarrow U_{n+1} > 3$ or $3 > 0$ donc $U_{n+1} > 0$

* D'après l'axiome de récurrence : $U_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} - U_n = 2U_n + 3 - U_n = U_n + 3 > 0$ d'après a)

Donc (U_n) est croissante

2°) Si U est majorée, elle sera alors croissante et majorée donc convergente vers un réel l

or $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = l \Rightarrow l = 2l + 3 \iff -l = 3 \iff l = -3$

Donc si U est majorée, sa limite est -3

3°) or tous les termes de la suite sont strictement positifs donc sa limite ne peut pas être négative strictement

D'où une contradiction.

Nous venons de démontrer par l'absurde que U n'est pas majorée.

Donc U est croissante et non majorée, elle est donc divergente vers $+\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.