AP : Suites et limites

Ex 1 1°) $U_n = n^2 + 6$ Soit A un réel > 6

On résout $U_n > A \iff n^2 + 6 > A \iff n^2 > A - 6 \underset{\text{car } n \geq 0}{\iff} n > \sqrt{A-6}$

Donc tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ (A réel > 6) contient tous les U_n à partir d'1 certain rang (càd pour $\forall n > \sqrt{A-6}$)

2°) $U_n = -\frac{1}{3n}$ α réel $\alpha > 0$

On résout $0 - \alpha < -\frac{1}{3n} < 0 + \alpha \iff -\alpha < \frac{-1}{3n} < \alpha \iff$

$-\alpha < -\frac{1}{3n}$ et $\underbrace{\frac{-1}{3n} < \alpha}_{\text{tjs vrai car } \ominus < \oplus} \iff \alpha > \frac{1}{3n} \iff \frac{1}{\alpha} < 3n \iff n > \frac{1}{3\alpha}$

Donc tout intervalle ouvert contenant 0 (de la forme $]-\alpha ; \alpha[$; $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$) contient tous les U_n, à partir d'1 certain rang ($\forall n > \frac{1}{3\alpha}$)

Ex 2 1°) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{2n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{2} \frac{1}{n^2} = 0$

2°) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ (par somme) car $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} n - 7 = +\infty$

3°) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^3\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{7}{n^3}\right) = +\infty$ par produit car $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7}{n^3} = 0 \Rightarrow \lim\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{7}{n^3}\right) = 1$

4°) $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \frac{n^2}{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \frac{n^2}{n\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \frac{n}{2 + \frac{1}{n}} = +\infty$ (par quotient)

car $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$

5°) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2 + n - 5}{n^2 + 3n + 4} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = \lim \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$ par quotient

car $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = 0$

6°) $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n - \frac{3 + 6n^2}{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} 3n - \frac{n^2\left(\frac{3}{n^2} + 6\right)}{n\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} n\left[3 - \frac{\left(\frac{3}{n^2} + 6\right)}{2 + \frac{1}{n}}\right]$

$= FI$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6}{n^2} + 6 = 6$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n(2n+1) - (3 + 6n^2)}{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{6n^2 + 3n - 3 - 6n^2}{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n - 3}{2n+1}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n\left(3 - \frac{3}{n}\right)}{n\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3 - \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$ par quotient et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

7°) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 + n - 5} = +\infty$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + n - 5 = +\infty$ par somme

8) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 - n - 5} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)} = +\infty$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = +\infty$ par produit

car $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} = 1$

9°) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n+1-n}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}+\sqrt{n} = +\infty$ par somme et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

10°) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+3}{3n^2+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}^2 n\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}\left(3+\frac{5}{n^2}\right)} = 0$ par produit et quotient

et car $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{\sqrt{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = +\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{5}{n^2} = 3 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\left(3+\frac{5}{n^2}\right) = +\infty$

11°) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+3}{3\sqrt{n}+5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(3+\frac{5}{\sqrt{n}}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(3+\frac{5}{\sqrt{n}}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)}{3+\frac{5}{\sqrt{n}}}$

$= +\infty$ par quotient et car $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{3}{n} = 1$ par produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1+\frac{3}{n}\right) = +\infty$ et aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{5}{\sqrt{n}} = 3$

12°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $-1 \leq \sin n \leq 1$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{\sin n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ car $n^2 > 0$

$\Rightarrow 4-\dfrac{1}{n^2} \leq U_n \leq 4+\dfrac{1}{n^2}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} 4-\dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} 4+\dfrac{1}{n^2} = 4$ et d'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4$

13°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $-1 \leq \cos n \leq 1$

$\Rightarrow -3 \leq -3\cos n \leq 3$ $\times(-3)$

$2n^2-3 \leq 2n^2-3\cos n \leq 2n^2+3$ $+2n^2$

$\dfrac{2n^2-3}{n^2+1} \leq U_n \leq \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$ $\div(n^2+1)$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-3}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n^2}\left(2-\frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{2}{1} = 2$ car ....

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+1} = 2$

D'après le théo des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

14°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ $\Rightarrow -\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ car $n+1>0$

Théo gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

15°) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ pour $-1<q<1$, $q=\frac{1}{2}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$

donc Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

16°) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ Idem

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car $\lim q^n = +\infty$ si $q>1$, $q=3$

donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

17°) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^n}{8^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ si $-1<q<1$, $q=\frac{5}{8}$

18°) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^{n+3}}{8^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^n\times 5^3}{8^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 125\left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$ Idem (17°)

19°) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^{3n}}{8^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(5^3)^n}{8^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5^3}{8}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{125}{8}\right)^n = +\infty$

car $q=\frac{125}{8}>1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ si $q>1$

Ex 3 1°) FAUX contre exple : $U_n = n-1$ alors $U_n \leq n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \cancel{+}\infty$
(U_n) diverge.

2°) VRAI $U_n \geq \frac{n}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$ d'après 1 théo de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow (U_n)$ diverge

3°) FAUX contre exple : (U_n) telle que $U_0 = 7_{\geq 0}$ $U_1 = 6_{\geq 1}$ $U_2 = 5_{\geq 2}$ $U_3 = 4_{\geq 3}$
et $U_n = n+1$ pour $n \geq 4$
(U_n) est ↘ et pourtant $U_n \geq n$ pour $\forall n \in \mathbb{N}$

4°) FAUX Contre exple : (U_n) défini par $U_1 = 0{,}1 \leq \frac{1}{1}$ $U_2 = 0{,}2 \leq \frac{1}{2}$ $U_3 = 0{,}3 \leq \frac{1}{3}$
et $U_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 4$

5°) VRAI $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^2 \leq n^2 U_n \leq n^2+n$ $\div n^2$ $n^2>0$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$ $1 \leq U_n \leq \frac{n^2+n}{n^2}$
$\Rightarrow$ " $1 \leq U_n \leq 1+\frac{1}{n}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$ théo gendarmes.