AP : Produit scalaire dans l'espace

Les exercices 1 à 8 sont des exercices de base. Les suivants sont des exercices type Bac.

Ex1 : On considère le cube ABCDEFGH de coté a. Les points I, J, K, L et O sont les milieux respectifs de [BF], [FG], [CD], [BC] et [AG].
Calculer en fonction de a les produits scalaires :
$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KB}$; $\overrightarrow{DK}.\overrightarrow{BL}$; $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{DG}$; $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}$; $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BH}$; $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{BL}$; $\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{FC}$

Ex2 : Dans un repère orthonormé, on considère les points A(1 ; -1 ; 0) , B(-1 ; -2 ; -1) et C(3 ; -1 ; 1).
1°) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2°) Calculer AB et AC. En déduire une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Ex3 : On considère un cube ABCDEFGH.
1°) Montrer que la droite (EC) est orthogonale aux droites (BD) et (BG).
2°) Que peut-on en déduire pour la droite (EC) et le plan (DBG) ?

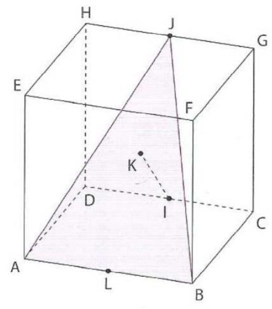
Ex4 : ABCD es un tétraèdre régulier d'arête a et J désigne le milieu de [AB].
1°) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$
2°) Montrer que (AB) et (CD) sont orthogonales.

Ex5 : Dans un repère orthonormé, on considère le point A(-2 ; 0 ; 5) et le vecteur $\vec{n}$ (2 ; -6 ; 4).
Déterminer une équation du plan P passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Ex6 : Dans un repère orthonormé, on considère la droite (AB) où A(1 ; 2 ; -1), B(0 ; 1 ; 3) et le plan P d'équation x + y + z – 1 = 0. Déterminer l'intersection de la droite (AB) et du plan P.

Ex7 : Dans un repère orthonormé, on considère les points P et Q d'équations respectives x - 3y + 2z = 5 et 2x + y +7z = 1.
Montrer que P et Q sont sécants et déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Ex8 : ABCDEFGH est un cube d'arête 3 cm. I est le milieu de [DC], J le milieu de [HG] et L le milieu de [AB]. *Voir cube 2ème page.*
1°) Calculer le volume du tétraèdre JABI.



2°) La perpendiculaire au plan (ABJ) passant par I coupe ce plan en K. On pose d = IK.
En exprimant le volume du tétraèdre JABI d'une autre façon, calculer la distance d, appelée distance du point I au plan (ABJ).

Ex9 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, soit les points A(-2 ; 0 ; 1), B(1 ; 2 ; -1) et C(-2 ; 2 ; 2).

1°) a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
b) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
2x – y + 2z + 2 = 0.

2°) Soit P_1 et P_2 les plans d'équations respectives x + y – 3z + 3 = 0 et x – 2y + 6z = 0.
Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite (d) dont on donnera une représentation paramétrique.

3°) Démontrer que la droite (d) et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4°) Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω(1 ; -3 ; 1) et de rayon r = 3.
a) Etudier l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite (d).
b) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.
On pourra faire une figure pour s'aider et trouver les coordonnées du projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC).

Ex10 : On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1. On désigne par I, Jet K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].
L'espace est muni d'un repère orthonormal (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$).

1°) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2°) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; 1 ; 1) est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ et à $\overrightarrow{IJ}$.

En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3°) a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).
b) En déduire que les coordonnées du point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD).

4°) Placer R et construire la section du cube par le plan (IJK).