Ex 1 : 1°) $|z|= |3i|$ = 3 et arg(z) = arg($3i$) = $\frac{\pi}{2}$ (2π)

2°) $|z|= |-2i|$ = 2 et arg(z) = arg($3i$) = $-\frac{\pi}{2}$ (2π)

3°)$|z|= |5|$ = 5 et arg(z) = arg(5) = 0 (2π)

4°) $|z|= |-7|$ = 7 et arg(z) = arg(-7) = π (2π)

5°)$|z|= \left|-3+i\sqrt{3}\right|$ = $\sqrt{9+3}$ = $\sqrt{12}$ = $2\sqrt{3}$ et arg(z) = θ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc θ = $\frac{5\pi}{6}$

Donc arg($-3+i\sqrt{3}$) = $\frac{5\pi}{6}$ (2π)

6°) $|z|= |-2-2i|$ = $\sqrt{4+4}$ = $\sqrt{8}$ = $2\sqrt{2}$ et arg(z) = θ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc θ = $-\frac{3\pi}{4}$

Donc arg($-2+2i$) = $-\frac{3\pi}{4}$ (2π)

7°) $|z|$= 5 et arg(z) = $\frac{\pi}{2}$ (2π) car z est donné sous sa forme algébrique.

8°) z = -5 (cos $\frac{\pi}{2}$ + i sin $\frac{\pi}{2}$) = -5(0 + 1 i) = - 5 i donc $|z|$ = 5 et arg(z) = $-\frac{\pi}{2}$ (2π)

Ex2 : $|z_A|$ = OA = 3 ; arg(z_A) = $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA})$ = π (2π)

$|z_B|$ = OB = 2 ; arg(z_B) = $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OB})$ = $\frac{\pi}{2}$ (2π)

$|z_C|$ = OC = 1 ; arg(z_C) = $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OC})$ = $-\frac{\pi}{2}$ (2π)

$|z_D|$ = OD = $2\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 2) ; arg(z_D) = $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OD})$ = $\frac{\pi}{4}$ (2π) $\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 2)

Ex3 : 1°) $|z|= \left|1+i\sqrt{3}\right|$ = $\sqrt{1+3}$ = $\sqrt{4}$ = 2 et arg(z) = θ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc θ = $\frac{\pi}{3}$

Donc arg($1+i\sqrt{3}$) = $\frac{\pi}{3}$ (2π) et donc z = 2 $\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\ i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2°) $|z|= \left|3-i\sqrt{3}\right|$ = $\sqrt{9+3}$ = $\sqrt{12}$ = $2\sqrt{3}$ et arg(z) = θ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ donc θ = $-\frac{\pi}{6}$

Donc arg($-3+i\sqrt{3}$) = $-\frac{\pi}{6}$ (2π) et donc z = $2\sqrt{3}$ $\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\ i\,sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

3°) $|z|= |-4i|$ = 4 et arg(z) = arg(- 4i) = $-\frac{\pi}{2}$ (2π)

donc z = 4 $\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\ i\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

4°) $|z|= |7-7i|$ = $\sqrt{49+49}$ = $\sqrt{2\times 49}$ = $7\sqrt{2}$ et arg(z) = θ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{7}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{-7}{7\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc θ = $-\frac{\pi}{4}$

Donc arg($7-7i$) = $-\frac{\pi}{4}$ (2π) et donc z = $7\sqrt{2}$ $\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\ i\,sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

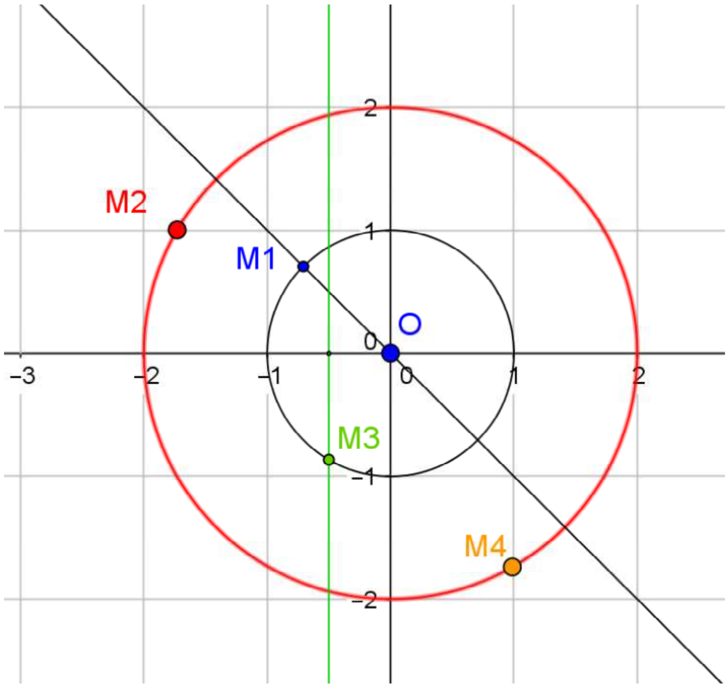
5°) z = 6 $\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\ i\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ = 6 $\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\ i\,sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ car la fonction cos est paire et la fonction sin impaire

6°) z = 6 $\left(-cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\ i\,sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ = -3$\sqrt{2}$ - 3$i\sqrt{2}$

$|z|= \left|-3\sqrt{2}\ -\ 3i\sqrt{2}\right|$ = $\sqrt{9\times 2+9\times 2}$ = $\sqrt{36}$ = 6 et arg(z) = θ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-3\sqrt{2}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{-3\sqrt{2}}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc θ = $-\frac{3\pi}{4}$

Donc arg($-3+i\sqrt{3}$) = $-\frac{3\pi}{4}$ (2π) et donc z = 6 $\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\ i\,sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Ex4 :



<u>Ex5</u> : 1°) z = $2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\ i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ = 2($-\frac{1}{2}$+ $i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$) = $-$ 1 + $i\sqrt{3}$

2°) z = $\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\ i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ = $\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\ \frac{1}{2}i\right)$= $-\frac{3}{2}$ - $i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Ex6</u> :

A-QCM

1°) c

2°) b et c

3°) b et c

4°) a

5°) a et c

6°) a et b

7°) b

B- 8°) Vrai

9°) Faux (car arg(z) peut être égal à $-\frac{\pi}{3}$)

10°) Vrai

11°) Faux (car arg(z) peut être égal à $-\frac{\pi}{2}$)

<u>Ex7</u> : a) $|z-i|$= 3 $\Leftrightarrow$ AM = 3 avec A le point d'affixe i
Donc l'ensemble des points M(z) est le cercle de centre A(i) et de rayon 3

b) Soit B(1 + 2 i) et C(-2 + i)
$|z-1-2i|$=) $|z+2-i|$ $\Leftrightarrow$ BM = CM
Donc l'ensemble des points M(z) est la médiatrice de [BC]

c) arg(z) = $\frac{\pi}{3}$ (2π) $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\,)$ = $\frac{\pi}{3}$ (2π)
Donc l'ensemble des points M(z) est la demi droite]OD] où D$\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) arg(z + i) =- $\frac{\pi}{4}$ (2π) $\Leftrightarrow$ arg(z_M-z_E) =- $\frac{\pi}{4}$ (2π) $\Leftrightarrow$ arg$(z_{\overrightarrow{EM}})$ =- $\frac{\pi}{4}$ (2π) $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}\,;\overrightarrow{EM}\,)$ =- $\frac{\pi}{4}$ (2π)
Donc l'ensemble des points M(z) est la demi droite]EF] où F(1 - 2 i)

<u>Ex8</u> : 1°) Soit Z = $(1-i)^9$ = z^9 où z = 1- i
$|z|$= $|1-i|$ = $\sqrt{1+1}$ = $\sqrt{2}$ et arg(z) = - $\frac{\pi}{4}$ (2π)
Donc $|Z|$= $|z|^9$ = $\sqrt{2}^9$ = $\sqrt{2}^8\sqrt{2}$ = $2^4\sqrt{2}$ = 16 $\sqrt{2}$ et arg (Z) = 9 arg z(2π) = - $\frac{9\pi}{4}$ (2π) = - $\frac{\pi}{4}$ (2π)

2°) Z = $\frac{1+i\sqrt{3}}{2+2i}$ = $\frac{z_1}{z_2}$ où z_1 = $1+i\sqrt{3}$ et z_2 = $2+2i$

$|z_1| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ et $\arg(z_1) = \theta$ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ Donc $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

$|z_2| = |2 + 2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Donc $|Z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\arg(Z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ (2\pi) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\ (2\pi) = \frac{\pi}{12}\ (2\pi)$

3°) $Z = \frac{\sqrt{3}+i}{i} = \frac{z_1}{z_2}$ où $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = i$

$|z_1| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ et $\arg(z_1) = \theta$ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \frac{\pi}{6}$ Donc $\arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

$|z_2| = |i| = 1$ et $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Donc $|Z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{1} = 2$ et $\arg(Z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ (2\pi) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\ (2\pi) = \frac{-\pi}{3}\ (2\pi)$

4°) $Z = (2 - 2i)^3(\sqrt{3} - i) = z_1^3 . z_2$ où $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$

$|z_1| = |2 - 2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Donc $|z_1{}^3| = (2\sqrt{2})^3 = 8 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ et $\arg(z_1{}^3) = 3\arg(z_1)\ (2\pi) = -\frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

$|z_2| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ et $\arg(z_2) = \theta$ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{b}{r} = -\frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{6}$ Donc $\arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

Donc $|Z| = 16\sqrt{2} \times 2 = 32\sqrt{2}$ et $\arg Z = -\frac{3\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{6}\right)(2\pi) = -\frac{11\pi}{12}\ (2\pi) = \frac{13\pi}{12}\ (2\pi)$

<u>Ex9</u> : 1°) $|z_1| = |\sqrt{2}(1+i)| = \sqrt{2}\ \sqrt{2} = 2$ $\arg(z_1) = \arg(\sqrt{2}(1+i)) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ Donc $z_1 = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\, sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$|z_2| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ $\arg z_2 = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$ Donc $z_2 = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\, sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Et alors $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{1} = 2$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ (2\pi) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\ (2\pi) = \frac{5\pi}{12}\ (2\pi)$

Donc $\frac{z_1}{z_2} = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\, sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

2°) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{6}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

3°) D'après 1°) $\frac{z_1}{z_2} = 2\left(cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\, sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = 2\,cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2\,i\,sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et comme $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

Alors on en déduit que $2\,cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ et $2\,sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ (car deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire)

Donc $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

<u>Ex10</u> :

1°)

a) $|4 - i| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$
b) $|1 + 2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
c) $|-3 + 4i| = \sqrt{9+16} = 5$
d) $|-4 - 5i| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

2°) avec les touches: Math / CMPLX/angle(

a) $\text{Arg}(4 - i) \simeq -0{,}24$ rad
b) $\text{Arg}(1 + 2i) \simeq 1{,}11$ rad
c) $\text{Arg}(-3 + 4i) \simeq 2{,}21$ rad
d) $\text{Arg}(4 - i) \simeq -2{,}25$ rad