TS AP : Fonction densité de probabilité et lois uniforme et exponentielle

Ex1 : X est une variable aléatoire à valeurs dans [0 ; 1] dont la loi de probabilité a pour densité la fonction définie par $f(x) = 4\,x^3$.
Calculer $p(0{,}2 \leq X \leq 0{,}5)$.

Ex2 : X est une variable aléatoire à valeurs dans [– 5 ; 5] dont la loi de probabilité a pour densité la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{250}\,x^2$.
Déterminer l'arrondi au centième du nombre réel a compris entre – 5 et 5 tel que $p(-a \leq X \leq a) = 0{,}5$.

Ex3 : f est la fonction définie sur [– 1 ; 1] par $f(x) = 0{,}75(1 - x^2)$.
1°) Justifier que f est une fonction de densité de probabilité sur [– 1 ; 1].
2°) X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité f.
Calculer $p(X \leq 0)$, $p(X \geq 0{,}5)$ et $p_{(X \leq 0{,}8)}(X \geq 0)$.

Ex4 : Déterminer le réel k pour que la fonction f soit une densité de probabilité sur [0 ; 3] avec $f(t) = k.t^2$.

Ex5 : X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [-2 ; 2].
1°) Déterminer la fonction densité de probabilité.
2°) Calculer $p(X = 0)$, $p(X < 1)$, $p(X \geq 0{,}5)$.
3°) Calculer $p_{(X > 0)}(X < 1)$.
4°) Calculer l'espérance de X.

Ex6 : Comme chaque matin, Malika est à 7h25 à l'arrêt du bus qui l'emmène au lycée. Le bus arrive de façon aléatoire uniforme entre 7h25 et 7h45.
a) Soit X la variable aléatoire égale au temps d'attente en minutes de Malika. Dans quel intervalle la variable aléatoire X prend-elle ses valeurs ?
b) Quelle est la probabilité qu'un matin donné, Malika monte dans le bus avant 7h30 ?
c) Quelle est la probabilité qu'un matin donné, Malika monte dans le bus après 7h35 ?
d) Malika a déjà attendu dix minutes. Quelle est la probabilité qu'elle monte dans le bus avant 7h40 ?

Ex7 : Lors de la restitution des notes d'une interrogation notée sur 20, le professeur annonce que suite à de nombreuses tricheries, il a décidé de noter chaque élève aléatoirement entre 5 et 15.
a) Quelle est la probabilité qu'un élève ait une note supérieure à 12 ?
b) Quelle note moyenne un élève peut-il espérer obtenir ?
c) Un élève qui n'a pas triché est effondré à l'annonce de ce système de notation. Il espérait avoir une note supérieure à 14. Pour le rassurer, le professeur lui indique que sa note est supérieure à 12.
Quelle est la probabilité que sa note soit supérieure à 14 sachant qu'elle est supérieure à 12 ?

Ex8 : Chaque soir, deux copains, Axel et Matthieu, se connectent pour jouer. Matthieu, ponctuel, se connecte chaque soir à 19h précises tandis qu'Axel se connecte de manière aléatoire entre 19h et 19h30.
a) Quelle est la probabilité qu'un soir, Matthieu attende plus de 10 minutes ?
b) Un soir, Matthieu attend depuis 20 minutes. Agacé, il décide de se déconnecter dans les deux minutes qui suivent, si Axel n'est toujours pas connecté. Quelle est la probabilité qu'Axel et Matthieu jouent ensemble en réseau ce soir-là ?

Ex9 : La durée d'attente à une caisse de supermarché est assimilée à une loi exponentielle. La variable aléatoire égale au délai d'attente suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.
1°) Quelle est la probabilité qu'un client attende moins de cinq minutes ?
2°) Quelle est la probabilité qu'il attende plus de 15 minutes ?

Ex10 : La durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire T (exprimée en jours) qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,0004.
Calculer $p(T \leq 300)$ et $p(T \geq 300)$. Calculer $p_{(T > 200)}(T > 500)$.

Ex11 : Polynésie – juin 2004
Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.
1°) Sachant que $p(X > 10) = 0{,}286$, calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de λ.
On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2°) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3°) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?
4°) On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
5°) Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?