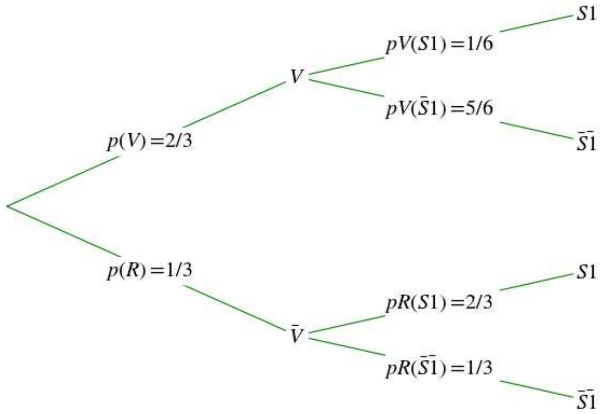
Exercice 1

1°)a) arbre



b) D'après la formule des probabilités totales :

$p(S_1) = p(V \cap S_1) + p(R \cap S_1)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

2°) a) On considère l'épreuve de Bernoulli : on lance le dé **rouge une** fois, avec comme succès : on « on tombe sur le 6 » de probabilité $\frac{2}{3}$.

On répète 20 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

La variable aléatoire X, qui compte le nombre de « 6 », suit alors la loi binomiale $B(20 ; \frac{2}{3})$.

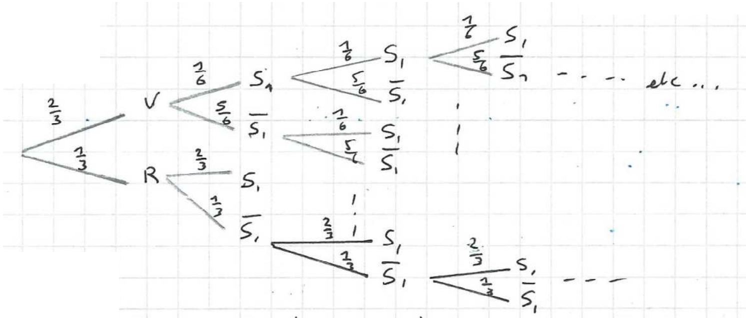
La probabilité d'avoir 10 fois un 6 est donc $p(X=10) \simeq$ **0,054**. (à 10^{-4} près à la calculatrice)

b) $p(X \geq 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leq 9) \simeq$ **0,9624**. (à 10^{-4} près à la calculatrice)

c) $E(X) = n.p = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \simeq$ **13,33**

$V(X) = n.p.(1-p) = 20 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{40}{9} \simeq$ **4,44** **donc** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{40}{9}} = \frac{\sqrt{40}}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \simeq$ **2,11**

3°) a) D'après l'arbre pondéré ci-contre et comme dans 1°)b), on a :



$p(Sn) = p(V \cap Sn) + p(R \cap Sn)$

$= p(VS_1\ S_1\ S_1 \ldots\ldots S_1) + p(RS_1\ S_1\ S_1 \ldots\ldots S_1)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \ldots \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \ldots \times \frac{1}{6}$

$\mathbf{P(Sn) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

b) $p_n = p_{Sn}(R) = \frac{p(R \cap Sn)}{p(Sn)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(2\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{1}{6}\right)^n + 1\right)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1\right)} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$$

c) On résout $p_n > 0{,}999 \Leftrightarrow \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} > 0{,}999 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1 < \frac{1}{0{,}999} \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1 < \frac{1000}{999}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{2}\left(\frac{1000}{999} - 1\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{1998} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right)^n < \ln\left(\frac{1}{1998}\right)$

(on applique la fonction ln qui est croissante sur $]0 ; +\infty[$)

$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{4}\right) < -\ln 1998 \Leftrightarrow n > \frac{-\ln 1998}{-\ln 4} \Leftrightarrow n > \frac{\ln 1998}{\ln 4}$ or $\frac{\ln 1998}{\ln 4} \simeq 5{,}48$ donc $\mathbf{n \geq 6}$

(car $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 < 0$)

Le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $p_n > 0{,}999$ est $n_0 = 6$

d)

```
Saisir n
Pour I allant de 1 à n
      p prend la valeur 1/(2(1/4)^I + 1)
      Afficher p
FinPour
```

```
n prend la valeur 1
p prend la valeur 1/(2 x (1/4)^n + 1)
Tant que  p < 0,999
      n prend la valeur n+1
      p prend la valeur 1/(2(1/4)^n + 1)
FinTantque
Afficher n
```

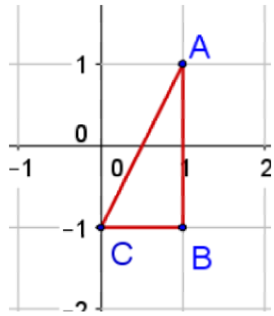
Exercice2

Partie A

1°) $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = -4 < 0$. Donc l'équation a 2 solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{2-i\sqrt{4}}{2} = 1 - i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1 + i$.

Donc **S = {1 – i ; 1 + i}**



2°) A(1 + i) B(1 – i) et C(-i)

Les affixes de A et B ont même partie réelle, donc A et B sont sur une parallèle à l'axe des ordonnées.

Les affixes de B et C ont même partie imaginaire, donc sur une parallèle à l'axe des abscisses.

On peut donc en déduire que (AB) ⊥ (BC) donc que ABC est rectangle en B.

3°) a) $P(z) = z^3 + (i - 2) z^2 + (2 - 2i) z + 2i$

a) $P(-i) = (-i)^3 + (i - 2)(-i)^2 + (2 - 2i)(-i) + 2i = i - i + 2 - 2i - 2 + 2i = 0$

b) $P(z) = (z + i)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz + iz^2 + iaz + ib$

Donc $z^3 + (i - 2) z^2 + (2 - 2i) z + 2i = z^3 + (a + i) z^2 + (b + ia) z + ib$

Par identification $\begin{cases} i-2 = a+i \\ 2-2i = b+ia \\ 2i = ib \end{cases}$ on en déduit que a = -2 et b = 2

Donc que **$P(z) = (z + i)(z^2 - 2z + 2)$**

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + i)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow z + i = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Leftrightarrow z = -i$ ou $z = 1 - i$ ou $z = 1 + i$ d'après 1°) . Donc **S = { -i ; 1 – i ; 1 + i}**

Partie B

1°) *Pour savoir si C appartient à D, on doit vérifier s'il existe une valeur pour t tel que $\begin{cases} 9 = 5-2t \\ -5 = 1+3t \\ 4 = 4 \end{cases}$

Ce système équivaut à $\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ 4 = 4 \end{cases}$ donc à t = -2. Donc C ∈ D.

*De même pour la droite D' :

on peut trouver une représentation paramétrique de D' : $\begin{cases} x = 3+2t' \\ y = 1-t' \\ z = 1+2t' \end{cases}$ où t' ∈ ℝ

Ou <u>autre méthode</u> : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D' et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$: Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles). Donc **C ∉ D'**.

*Représentation paramétrique de P : $\begin{cases} x = 1-2k+k' \\ y = 1+k-4k' \\ z = 1+4k+5k' \end{cases}$ où k et k' sont réels.

On résout $\begin{cases} 9 = 1-2k+k' \\ -5 = 1+k-4k' \\ 4 = 1+4k+5k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = 8+2k \\ -5 = 1+k-4(8+2k) \\ 4 = 1+4k+5(8+2k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = 8+2k \\ -5 = 1+k-32-8k \\ 4 = 1+4k+40+10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = 8+2k \\ 7k = -26 \\ 14k = -37 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k' = 8 + 2k \\ k = \frac{-26}{7} \\ k = \frac{-37}{14} \end{cases}$ Donc le système n'a pas de solution, donc **C $\notin$ P**.

2°) *$\vec{u_D}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de D et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de D' ne sont pas colinéaires,

donc **D $\nparallel$ D'**

*Pour savoir si D et d' sont sécantes, on résout $\begin{cases} 5 - 2t = 3 + 2t' \\ 1 + 3t = 1 - t' \\ 4 = 1 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2t = 3 + 2t' \\ 1 + 3t = 1 - t' \\ t' = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{2} \\ t = \frac{-1}{2} \\ t' = \frac{3}{2} \end{cases}$

Donc D et D' sont sécantes, elles sont donc coplanaires.

3°) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont 2 vecteurs non colinéaires.

Cherchons alors si on peut trouver 2 nombres α et β tels que $\vec{u_D} = \alpha\, \vec{v} + \beta\, \vec{w}$

On résout alors $\begin{cases} -2 = -2\alpha + \beta \\ 3 = \alpha - 4\beta \\ 0 = 4\alpha + 5\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -2(3 + 4\beta) + \beta \\ \alpha = 3 + 4\beta \\ 0 = 4(3 + 4\beta) + 5\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{-4}{7} \\ \alpha = 3 + 4\beta = \frac{5}{7} \\ \beta = \frac{-12}{21} = \frac{-4}{7} \end{cases}$

Donc **$\vec{u_D} = \frac{5}{7}\vec{v} - \frac{4}{7}\vec{w}$. Donc les vecteurs $\vec{u_D}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.**

Exercice 3

Partie A

u(x) = x^2 - 2 + ln x u est définie sur]0 ; +∞[

1°) u est dérivable sur]0 ; +∞[, comme somme de fonctions dérivables

Pour tout $x > 0$, u'(x) = 2 x + $\frac{1}{x}$ qui est > 0 comme somme de nombres strictement positifs.

$\lim\limits_{x\to 0^+}$u(x) = **-∞** par somme et car $\lim\limits_{x\to 0^+}$ ln x = - ∞ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 2 = -2$;

$\lim\limits_{x\to +\infty}$u($x$) = **+∞** par somme et car $\lim\limits_{x\to +\infty}$ ln x = + ∞ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 2 = +\infty$

x	0		α		+∞
u'(x)	‖		+		
u	‖ -∞	↗	0	↗	+∞
Signe u(x)	‖	-	0	+	

2°) a) La fonction u est continue (car dérivable) et strictement croissante sur]0 ; +∞[.
De plus 0 ∈]-∞ ; +∞[.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation u(x) = 0 admet une unique solution α sur]0 ; +∞[.

b) A la calculatrice $\alpha \simeq 1{,}314$. Donc $\mathbf{1{,}31 < \alpha < 1{,}32}$ (d'amplitude 10^{-2} près)

3°) D'après le tableau de variation et 2°a), on en déduit le signe de u(x) (dernière ligne du tableau en 1°))

4°) On sait que u(α) = 0 ⇔ $\alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0$ ⇔ $\mathbf{\ln\alpha = 2 - \alpha^2}$.

Partie B   f(x) = $x^2 + (2 - \ln x)^2$ D_f =]0 ; +∞[

1°) f est dérivable sur]0 ; +∞[, comme somme et produit de fonctions dérivables.

Pour tout x de]0 ; +∞[, f'(x) = 2 x + 2 $\left(\frac{-1}{x}\right)$(2 – ln x) = $\frac{2x^2-2(2-\ln x)}{x} = \frac{2x^2-4+2\ln x}{x} = \frac{2(x^2-2+\ln x)}{x} = \frac{\mathbf{2u(x)}}{\mathbf{x}}$

Comme $x > 0$, f'(x) a même signe que u(x) .

D'où :

x	0		α		+∞
f'(x)	‖	-	0	+	
f	‖	↘	f(α)	↗	

3°) f(α) = $\alpha^2 + (2 - \ln\alpha)^2 = \alpha^2 + (2 - 2 + \alpha^2)^2 = \alpha^2 + (\alpha^2)^2 = \alpha^2 + \alpha^4 = \alpha^2(1 + \alpha^2)$.
(d'après A-4°))

Partie C

1°) A(0 ;2) et M(x ;ln x)

Donc AM = $\sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2}$ = $\sqrt{f(x)}$. **Donc AM = $\sqrt{f(x)}$**

2°) g(x) =$\sqrt{f(x)}$ D_g =]0 ; +∞[

a) g dérivable sur]0 ; +∞[, comme composée.

Pour tout x >0, g'(x) = $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Comme $2\sqrt{f(x)}$ >0, alors g'(x) et f'(x) ont même signe, donc g et f ont même variations sur]0 ; +∞[.

b) D'après les variations de f, on a

x	0	α	$+\infty$
g	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$

AM = $\sqrt{f(x)}$ = g(x) . Comme g admet un minimum en x = α, AM est donc minimale en un point P de la courbe Γ d'abscisses α, donc d'ordonnée ln α, soit **P(α ; ln α)**

c) AP = g(α) = $\sqrt{f(\alpha)}$ = $\sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)}$ = $\boldsymbol{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}$

3°) $\overrightarrow{AP}\binom{\alpha}{\ln\alpha - 2}$ et la tangente à Γ en P a pour coefficient directeur ln'(α) = $\frac{1}{\alpha}$, donc cette tangente a pour vecteur directeur $\vec{v}\binom{1}{\frac{1}{\alpha}}$.

Calculons $\overrightarrow{AP}.\vec{v}$ = $\alpha \times 1$ + $(\ln\alpha - 2) \times \frac{1}{\alpha}$ = α + $\frac{\ln\alpha}{\alpha}$ - $\frac{2}{\alpha}$ = = $\frac{\alpha^2+\ln\alpha-2}{\alpha}$ = $\frac{u(\alpha)}{\alpha}$ = 0. Donc $\overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$.

Donc (AP) est perpendiculaire à la tangente à Γ en P.

Exercice 4

Explications :

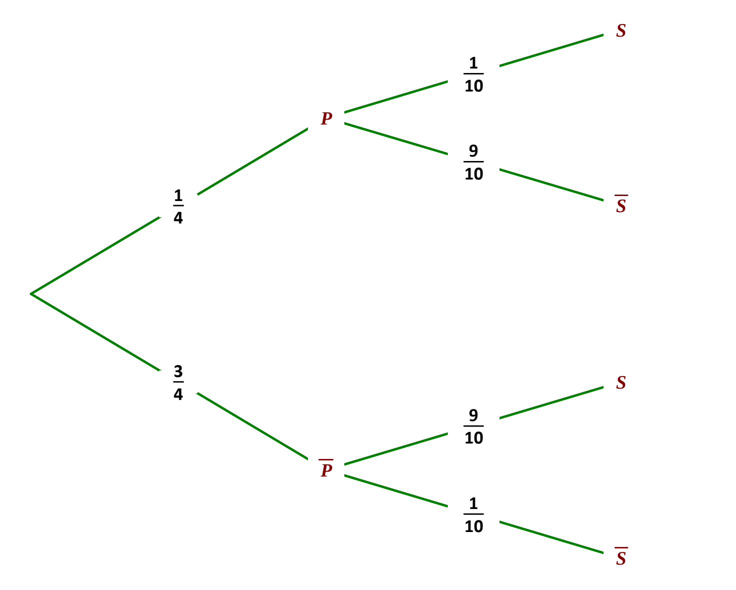
1°) On cherche d'abord

$p(S) = p(S \cap P) + p(S \cap \overline{P})$

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{4} \times \frac{9}{10} = \frac{28}{40} = \mathbf{0{,}7}$

Et alors $p_S(\overline{P}) = \frac{p(S \cap \overline{P})}{p(S)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{9}{10}}{0{,}7} = \mathbf{\frac{27}{28}}$

Réponses
1°) d
2°) b
3°) d
4°) d
5°) d



2°) Pour tout n : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$,

donc $2n - \sqrt{n} \leq 2n + (-1)^n\sqrt{n} \leq 2n + \sqrt{n}$

D'où $\frac{2n - \sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{2n + (-1)^n\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{2n + \sqrt{n}}{n+1}$

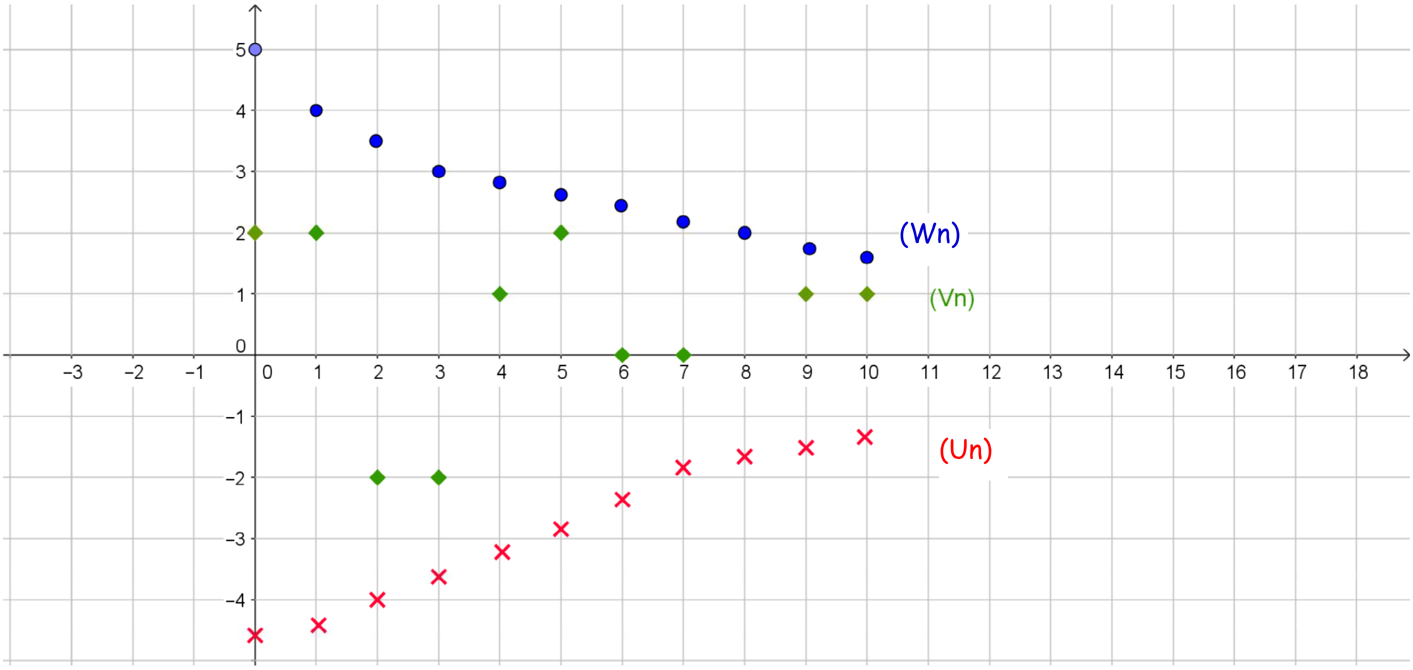
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n + \sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(2 + \frac{\sqrt{n}}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2 + \frac{\sqrt{n}}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$.

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n - \sqrt{n}}{n+1} = 2$.

On en déduit d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n + (-1)^n\sqrt{n}}{n+1} = 2$

3°) a) est faux car : contre-exemple : pour tout n $u_n = -1$; $w_n = 1$ et $v_n = 1$, alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1 \neq 0$

b) et c) sont faux . Contre-exemple :



4°) a) est faux car en construisant la suite sur la calculatrice, on peut conjecturer que la suite diverge vers $+\infty$.

b) est faux, car : pour tout n $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$. (V_n) est donc géométrique de raison 2. $v_0 = u_0 - 1 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$.

c) est faux, car D'après b), $v_n = 0{,}5 \times 2^n$, qui n'est pas majorée.

d) est vrai car pour tout n $w_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(2u_n - 1 - 1) = \ln(2u_n - 2) = \ln(2(u_n - 1)) = \ln 2 + \ln(u_n - 1)$

$= \ln 2 + w_n$. Donc (w_n) est arithmétique de raison ln 2.

5°) d car test à la main :

	initialisation	1è fois	2è fois	3è fois	4è fois	sortie
S < n ou S = n		$0 \leq 1$ Vrai	$0 \leq 2$ Vrai	$6 \leq 3$ Faux	$3 \leq 4$ Vrai	
S	0	S=0+2×1 = 2	S=2+2×2 = 6	S= 6-3 = 3	S=3+2×4=11	**S=11**
n	1	n = 1+1 = 2	n = 2+1 = 3	n = 3+1 = 4	n = 4+1 = 5	