TS AP : Intégrales et problèmes

Ex1 : On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	0	$1+e^{-2}$	1

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Partie A

1°) Tracer une courbe C susceptible de représenter f dans le plan (unités graphiques : 1cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

2°) a) Interpréter graphiquement g(2).

b) Montrer que $0 \leq g(2) \leq 2{,}5$.

3°) a) Soit un réel x tel que $x \geq 2$. Montrer que : $\int_2^x f(t)dt \geq x - 2$.

En déduire que $g(x) \geq x - 2$.

b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4°) Etudier le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

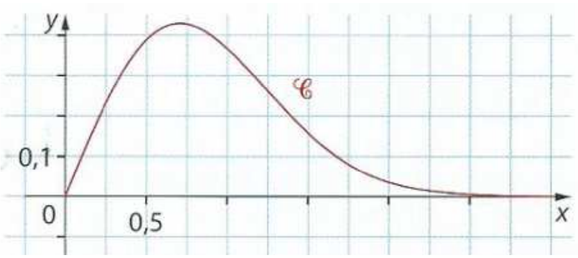
On admet que, pour tout réel t : $f(t) = (t - 1)e^{-t} + 1$.

1°) Montrer que pour tout réel x , $g(x) = x(1 - e^{-x})$.

2°) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Ex2 : Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\,e^{-x^2}$.

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.



Partie A

1°) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Démontrer que f admet un maximum. Le préciser.

2°) Soit un réel $a \geq 0$. On note F(a) l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.

a) Exprimer F(a) en fonction de a.

b) Quelle est la limite de F(a) quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1°) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

2°) Quel est le sens de variations de la suite u ?

3°) Etudier la convergence de la suite u.

Ex3

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1°) a) Montrer que, pour tout n entier naturel : $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n\,dx$.

b) En déduire la limite de I_n.

2°)Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n.

3°) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + \ldots + (-1)^n (I_n + I_{n+1})$.

a) Simplifier S_n.

b) En déduire une expression de :

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex4

Le plan est muni d'un repère orthonormé avec pour unité graphique 1 cm.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$ et C sa courbe représentative.

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) a) Etudier le sens de variation de f et donner le tableau de variation de f.

b) Tracer C.

3°) Soit $I = \int_{-3}^0 f(x)dx$.

a) Interpréter graphiquement I.

b) Déterminer des réels α, β et γ tels que la fonction F définie par $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^x$ soit une primitive de f.

c) En déduire I.

ex 109 ; 112 ; 123 p 213 Déclic et 97 p 260 du Math'x