TS AP : Intégrales : propriétés

Ex1 : Soit la fonction f définie sur [-1 ; + ∞[par f(x) = $\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2+1}\, dt$.

1°) Justifier que f est dérivable sur [-1 ; + ∞[. Calculer f'(x) .

2°) En déduire le sens de variation de f sur [-1 ; + ∞[.

Ex2 : Dans les questions suivantes, déterminer la(ou) les bonne(s) réponse(s):

1°) Soit f la fonction définie sur]-1 ; 1[par f(x) = $\int_{0}^{x} \frac{1}{1-t^2}\, dt$.

a)f est positive sur]-1 ; 1[b)f est croissante sur]-1 ; 1[

c) f(0) = 1.

2°) Soit f une fonction continue sur ℝ . Soit φ la fonction définie sur ℝ par $\varphi(x) = \int_{0}^{2x} f(t)\, dt$. Alors φ est dérivable sur ℝ et on a pour tout x réel :

a) $\varphi'(x) = f(2x)$ b) $\varphi'(x) = f(x)$ c) $\varphi'(x) = 2f(2x)$ d) $\varphi'(x) = 2f(x)$.

3°) L'intégrale $\int_{0}^{2} e^{2x}\, dt$ est égale à :

a)$\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$ b) e^{2x} c) e^{2t} d) $2e^{2x}$.

Ex3: On considère la fonction f définie sur [0 ; + ∞[par f(x) = $\int_{0}^{x} \frac{e^t}{t^2+1}\, dt$

1°) Calculer f'(x). Etudier les variations de f sur [0 ; +∞[.

2°) a) Vérifier graphiquement à la calculatrice que pour tout t ≥ 0, $\frac{e^t}{t^2+1} \geq 1$.

b) En déduire que f(2) ≥ 2.

3°) Montrer qu'il existe un unique réel c de [0 ; 2] tel que f(c) = 1.

Ex4 : Donner le signe de chacune des intégrales suivantes, sans les calculer :

1°) $I_1 = \int_{-1}^{2} \frac{1}{x-3}\, dx$ 2°) $I_2 = \int_{2}^{-3} (2x+1)^2\, dx$ 3°) $I_3 = \int_{-3}^{-1} e^{-2x}\, dx$

Ex5 : Démontrer que pour tout x réel de [0 ; 1], on a $1 \leq e^{x^2} \leq e^x$, puis en déduire un encadrement de l'intégrale $\int_{0}^{1} e^{x^2}\, dx$.

Ex6 : 1°) Vérifier à la calculatrice que $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$.

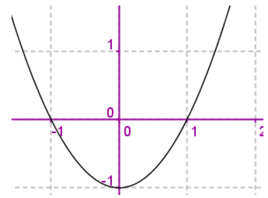
2°) Calculer $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx$.

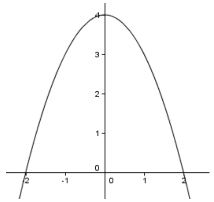
3°) En admettant le résultat du 1°), en déduire la valeur de $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

Ex7 : Calculer $\int_{0}^{\pi} |cos(x)|\, dx$.

Ex8 : La courbe C représente la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $x^2 - 1$.

Calculer l'aire du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe.





Ex9 : La courbe C représente la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $4 - x^2$.

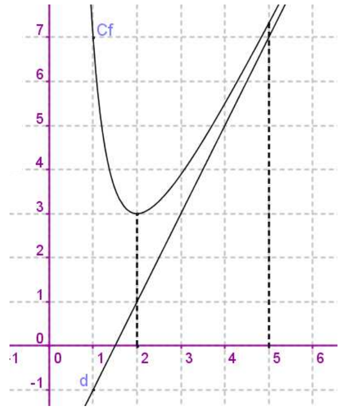
Calculer l'aire, en cm², du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe dans un repère d'unités 0,5 cm.

Ex10 : On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par f(x) = $2x - 3 + \frac{8}{x^2}$.

C_f est la courbe représentative de la fonction f dans ce repère et (d) est la droite d'équation : y = 2x – 3.

1°) Etudier la position de C_f par rapport à (d).

2°) Calculer l'aire comprise entre C_f, (d) et les deux droites d'équations x = 2 et x = 5.



Ex11 : On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $2x + 3 - 4e^{-x}$. On note C_f sa courbe représentative.

1°) Montrer que, pour tout $x \geq 1$, f(x) > 0.

2°) Etudier la position de C_f par rapport à la droite (d) : $y = 2x + 3$.

3°) Calculer l'aire entre C_f et (d) pour x appartenant à l'intervalle [1 ; 3].

Ex12 : Considérons la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $9x^2 + 4x$.

1°) Calculer la valeur moyenne de f sur [0 ; 2]. On notera V_m cette valeur.

2°) Trouver le réel c de [0 ; 2] tel que V_m = f(c).

Ex13 : Un artisan propose des chocolats « faits maison ». Il en fabrique de 1 à 18kg par jour. Le coût de fabrication des chocolats exprimé en euros est modélisé par la fonction f définie sur [1 ; 18] par f(x) = $2x + 100e^{-0,2x}$.

Pour l'artisan, la valeur moyenne du coût de fabrication d'un kilogramme de chocolats est donnée par la valeur moyenne de f sur [1 ; 18].

Déterminer une valeur approchée, arrondie à un euro près, de ce coût moyen.