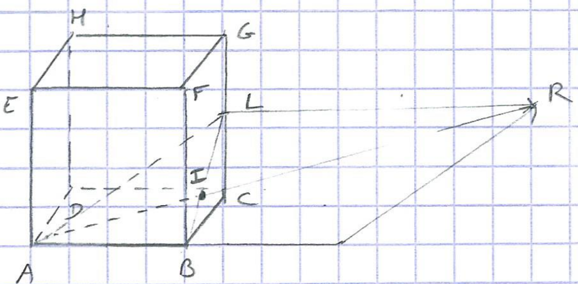
AP Vecteurs de l'espace – Représentations paramétriques

Ex 1



1°) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL}$ ne sont pas colinéaires et $\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AL}$,

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AR}$ sont coplanaires. On en déduit que les points A, B, L, R sont coplanaires.

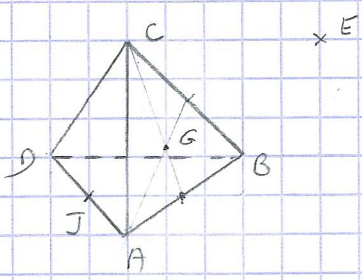
2°) Dans le plan (ABRL), (AR) et (BL) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes. Soit I l'intersection entre (AR) et (BL)

$I \in (BL)$ et $(BL) \subset (BCG) \Rightarrow I \in (BCG)$ } donc I appartient à l'intersection de (AR) et (BCG)

et $I \in (AR)$

et comme (AR) et (BCG) ne sont pas confondus, alors l'intersection de (AR) et (BCG) est le point I intersection entre (AR) et (BL)

Ex 2



1°) $\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ où C' milieu de [AB]

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{JG} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{JE} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ car $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ car ABCD parallélogramme

2°) On remarque que $3\overrightarrow{JG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{JE}$

Donc $\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{JE}$ sont colinéaires. Donc les points J, G, E sont alignés.

Ex 3

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

Ex 4 Dans $(D, \vec{DA}, \vec{DC} ; \vec{DH})$ orthonormé :

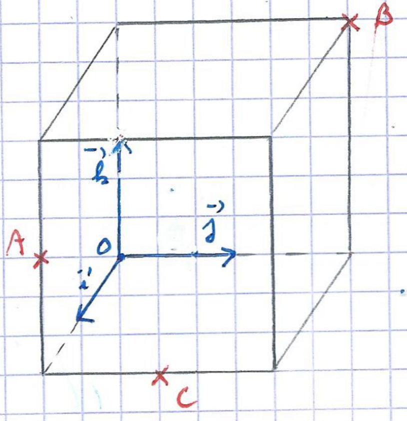
$D(0;0;0)$

$A(1;0;0)$ $B(1;1;0)$ $C(0;1;0)$ $E(1;0;1)$ $F(1;1;1)$

$G(0;1;1)$ $H(0;0;1)$. $P(1;1;\frac{1}{2})$ $I(1;\frac{1}{2};0)$

$M(0;\frac{1}{2};1)$ $J(\frac{1}{2};1;1)$

Ex 5



Ex 6

1°) $I\left(\frac{2+4}{2} ; \frac{1+2}{2} ; \frac{5+4}{2}\right)$ $I(3;\frac{3}{2};\frac{9}{2})$

2°) $AB = \sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2+(4-5)^2}$

$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.

3°) $2\vec{u}\begin{pmatrix}4\\10\\-4\end{pmatrix}$ $-3\vec{v}\begin{pmatrix}+12\\-3\\-21\end{pmatrix}$

donc $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v} = 2\vec{u} + (-3\vec{v})$

$\vec{w}\begin{pmatrix}4+12\\10-3\\-4-21\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}16\\7\\-25\end{pmatrix}$

4°) $\vec{AD}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ Ici $2\vec{BC} = \vec{AD}$; $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$ colinéaires

Donc $(AD) \parallel (BC)$

5°) D'après 4°), $(AD) \parallel (BC)$. De plus (AD) et (BC) ne sont pas confondues (sinon A, B, C, D seraient alignés donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{CD}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ seraient colinéaires, ce qui n'est pas le cas car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles)

Donc les points A, B, C, D sont coplanaires et forment un plan, noté (ABC) par exple

et comme $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas colinéaires, alors $(AB) \nparallel (CD)$

Donc (AB) et (CD) sont sécantes

6°) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ Les coordonnées ne sont pas proportionnelles

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires

Donc, A, B, C non alignés

b) $\vec{AE}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ et $-2\vec{AB}+3\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\times2+3\times1\\-2\times1+3\times2\\-2\times(-1)+3\times0\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ Donc $\vec{AE} = -2\vec{AB}+3\vec{AC}$ car m̂m coordonnées

c) Comme $\vec{AB}, \vec{AC}$ non colinéaires et $\vec{AE} = -2\vec{AB}+3\vec{AC}$

Alors les vecteurs $\vec{AE}, \vec{AB}, \vec{AC}$ sont coplanaires, Donc les points

A, B, C, E sont coplanaires.

Ex 7 1°) $\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\-5\\-10\end{pmatrix}$

$M(x;y;z) \in (AB) \iff \vec{AM} = k\,\vec{AB}$ où $k \in \mathbb{R}$ $\iff \begin{cases} x+2 = 5k \\ y-5 = -5k \\ z-4 = -10k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} x = 5k-2 \\ y = -5k+5 \\ z = -10k+4 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$ $\to$ Représentation paramétrique de (AB)

2°) a) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-2\\4\end{pmatrix}$ 2 vecteurs directeurs de D.

b) si $t=0$ $A(2,-1,1) \in D$ si $t=1$ $B(5;0;-1) \in D$

c) On résout $\begin{cases} 2+3t = -1 \\ -1+t = -2 \\ 1-2t = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -\frac{3}{3} = -1 \\ t = -2+1 = -1 \\ t = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$ Le système n'a pas de solution

Donc $P \notin D$.

Ex 8

1°) On résout $\begin{cases} -1+3t = -4-3k \\ 1-3t = 9-2k \\ 2t = -5+k \end{cases} \iff \begin{cases} -1+3t = -4-3(2t+5) \\ 1-3t = 9-2(2t+5) \\ k = 2t+5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 9t = -18 \\ t = -2 \\ k = 2(-2)+5 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ k = 1 \end{cases}$ Le système a une solution unique

Donc (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point $I(-4-3\times1;\ 9-2\times1;\ -5+1)$

soit $I(-7;7;-4)$

2°) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d_1) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\6\\-4\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d_3)

$\vec{v} = -2\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (d_1) et (d_3) sont parallèles.

Strict^t ou confondues ?

or dans (d_3) si $t=0$ $O(0;0;0) \in (d_3)$ et le point $O \notin (d_1)$ car $\begin{cases} -1+3t = 0 \\ 1-3t = 0 \\ 2t = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = \frac{1}{3} \\ t = 0 \end{cases}$ pas de sol donc (d_1) et (d_3) sont strict^t parallèles

3°) $\vec{u}$ vect dir de (d_1) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ et $\vec{w}$ non colinéaires

$\vec{w}$ " de (d_4)

Donc $(d_1) \not\parallel (d_4)$

- Vérifier si (d_1) et (d_4) sont sécantes.

On résout $\begin{cases} -1+3t = 2k-4 \\ 1-3t = k-5 \\ 2t = -k+2 \end{cases} \iff \begin{cases} -1+3t = 2(6-3t)-4 \\ k = 6-3t \\ 2t = -6+3t+2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{9}{9} = 1 \\ k = 6-3t \\ t = 4 \end{cases}$

Le système n'a pas de solution. Donc les droites (d_1) et (d_4) ne sont pas sécantes.

(d_1) et (d_4) ni parallèles ni sécantes donc non coplanaires

Ex 9 a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles)

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Donc les points A, B, C forment le plan (ABC)

b) $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont 2 vecteurs directeurs non colinéaires de (ABC) et $A(1;0;2) \in (ABC)$

Donc $(ABC) : \begin{cases} x = 1 - 2t + 4k \\ y = 0 + t + k \\ z = 2 + t - 2k \end{cases}$ $t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ représentation paramétrique de (ABC)

Ex 10

$(P) : \begin{cases} x = 1 + k + 2t \\ y = -1 + k - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ $t \in \mathbb{R}$

$A(1;-1;3) \in (P)$ ↳ pour $k = t = 0$ $B(4;-1;6) \in (P)$ ↳ pour $k = t = 1$

$\vec{u}, \vec{v}$ 2 vect. directeurs de (P) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

Ex 11

Droite

* (AB) de vect dir $\vec{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et passant par $A(1;0;0)$

$(AB) : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

* (DC) vect dir $\vec{DC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et passant par $D(0;0;0)$

$(DC) : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

* (AD) vect dir $\vec{DA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et passant par $D(0;0;0)$

$(AD) \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

* (BC) $\vec{BC}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $B(1;1;0)$

$(BC) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

* (AE) : $\vec{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $A(1;0;0)$

$(AE) \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

* $(FB) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$

etc...

plans

* (ABCD) : vect directeurs $\vec{DA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{DC}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ non colinéaires passant par $D(0;0;0)$

$(ABC) \begin{cases} x = t \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $k \in \mathbb{R}$

* (BCGF) : vect dir $\vec{BC}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $B(1;1;0)$

$(BCGF) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = k \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}$

etc...