AP TS Corrigé « Primitives »

Dans toute la fiche, on admet que les fonctions sont continues sur les intervalles donnés, donc que les fonctions admettent des primitives.

Exercice 1

F(x) = $\frac{2}{6}x^6 + \frac{2}{5}\frac{1}{5}x^5 - 3\,\frac{1}{2}x^2 + x + k$ (où k est un réel)

$= \frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{25}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + x + k$.

On cherche k tel que F(1) = 2 $\Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{25} - \frac{3}{2} + 1 + k = 2$

$\Leftrightarrow k - \frac{13}{150} = 2 \Leftrightarrow k = 2 + \frac{13}{150} = \frac{313}{150}$

Donc la primitive de f qui vaut 2 en 1 est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

F(x) = $\frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{25}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{313}{150}$

Exercice 2

1°) f(x) $= 3(3x+1)^7$ I = $\mathbb{R}$

Donc F(x) = $\frac{1}{7+1}(3x+1)^{7+1} = \frac{1}{8}(3x+1)^8$

u'.u^n a pour primitive $\frac{1}{n+1}$ u^{n+1}

u(x) = $3x+1$, u'(x) = 3 et n = 7

2°) f(x) $= (3x+1)^7$ I = $\mathbb{R}$

u(x) = $3x+1$, u'(x) = 3 et n = 7

f(x) $= (3x+1)^7 = \frac{1}{3} \times 3(3x+1)^7$; f = $\frac{1}{3}$ u'.u^n donc F = $\frac{1}{3}\frac{1}{n+1}$ u^{n+1}

Donc F(x) = $\frac{1}{3}\frac{1}{8}(3x+1)^8 = \frac{1}{24}(3x+1)^8$

3°) f(x) $= \frac{x+2}{(x^2+4x+5)^2}$ I = $\mathbb{R}$

$\frac{u'}{u^2}$ a pour primitive $\frac{-1}{u}$

u(x) = $x^2 + 4x + 5$, u'(x) = $2x + 4$

f(x) = $\frac{1}{2}\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}$ f = $\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2}$

Donc F = $\frac{1}{2} \times \frac{-1}{u}$ donc F(x) = - $\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{-1}{2(x^2+4x+5)}$

4°) f(x) = $\frac{2}{\sqrt{3x+1}} + \pi$ I = $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$

$\frac{u'}{\sqrt{u}}$ a pour primitive $2\sqrt{u}$

u(x) = $3x+1$, u'(x) = 3

f(x) = $\frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt{3x+1}} + \pi$

Donc F(x) = $\frac{2}{3}\,2\sqrt{3x+1} + \pi x = \frac{4}{3}\sqrt{3x+1} + \pi x$

5°) f(x) = $e^x(e^x-1)^5$ I = $\mathbb{R}$

f = u'u^5 donc F = $\frac{1}{6}$ u^6

F(x) = $\frac{1}{6}(e^x-1)^6$

u'.u^n a pour primitive $\frac{1}{n+1}$ u^{n+1}

u(x) = $e^x - 1$, u'(x) = e^x et n = 5

6°) f(x) = e^{3x+2} I = $\mathbb{R}$

u'.e^u a pour primitive e^u

u(x) = $3x+2$, u'(x) = 3

f(x) = $\frac{1}{3}\,3\,e^{3x+2}$ f = $\frac{1}{3}$ u'.e^u

Donc F = $\frac{1}{3}$ e^u F(x) = $\frac{1}{3}e^{3x+2}$

7°) f(x) = $\frac{2}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}$ I = $]0\,;+\infty[$

u'.e^u a pour primitive e^u

u(x) = $\frac{-1}{x}$, u'(x) = $\frac{1}{x^2}$

f(x) = $2\,\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}$

f = 2 u'.e^u Donc F = 2 e^u F(x) = $2\,e^{\frac{-1}{x}}$

8°) f(x) = $\frac{3x+3}{(x^2+2x+3)^7}$ I = $\mathbb{R}$

u'.u^n a pour primitive $\frac{1}{n+1}$ u^{n+1}

u(x) = $x^2 + 2x + 3$, u'(x) = $2x + 2$ et n = -7

f(x) = $(3x+3)(x^2+2x+3)^{-7}$

$= \frac{3}{2}(2x+2)(x^2+2x+3)^{-7}$

f = $\frac{3}{2}$ u'.u^n

F = $\frac{3}{2}\frac{1}{-7+1}$ u^{-7+1} = $\frac{3}{2}\frac{-1}{6}$ u^{-6} = $\frac{3}{2}\frac{-1}{6}\frac{1}{u^6}$

Donc F(x) = = $\frac{3}{2}\frac{-1}{6}\frac{1}{(x^2+2x+3)^6} = \frac{-1}{4(x^2+2x+3)^6}$

9°) f(x) = $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ I = $]0\,;+\infty[$

u'.e^u a pour primitive e^u

u(x) = $\sqrt{x}$, u'(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

f(x) = $\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} = 2\,\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

f = 2 u'.e^u donc F = = 2 e^u

F(x) = $2\,e^{\sqrt{x}}$

Exercice 3

F(x) = $x(1 - e^{-x})$. F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, F'(x) = 1x$(1 - e^{-x})$ + x x (-(-e^{-x}))

= $(1 - e^{-x})$ + $x\, e^{-x}$ = (x - 1) e^{-x} + 1 = f(x)

Exercice 4

1°) f(x) = $\frac{e^x\,(e^x-1)}{(xe^x+1)^2} = \frac{e^x\,e^x(1-\frac{1}{e^x})}{\left(e^x\,(x+\frac{1}{e^x})\right)^2} = \frac{e^{2x}\,(1-\frac{1}{e^x})}{(e^x)^2(x+\frac{1}{e^x})^2} = \frac{(1-e^{-x})}{(x+e^{-x})^2}$

2°)

$\frac{u'}{u^2}$ a pour primitive $\frac{-1}{u}$

u(x) = $x + e^{-x}$, u'(x) =$1 - e^{-x}$

F(x) = $\frac{-1}{x+e^{-x}}$ + k où k décrit l'ensemble $\mathbb{R}$

3°) On sait que F(0) = 1 $\Leftrightarrow$ $\frac{-1}{e^0}$ + k = 1

$\Leftrightarrow$ k = 2

Donc la primitive de f qui vaut 1 en 0 est la fonction F définie par

F(x) = $\frac{-1}{x+e^{-x}}$ +2