TS AP : LOGARITHME NEPERIEN

Ex 1 : Exprimer en fonction de ln(2) :

a) ln(16) b) ln($\frac{1}{1024}$) c) ln(2 e^{-10}) d) ln($2\sqrt{2}$)

Ex2 : Calculer les réels : ln(e^2) – $e^{\ln(5)}$; ln($\sqrt{7}$- $\sqrt{3}$) + ln($\sqrt{7}$+ $\sqrt{3}$) ; $e^{-\ln(3)}$

2 ln(125)- ln($\frac{1}{64}$) ; ln(0,32) + ln(1000) ; ln(10e²) ; ln($\sqrt{\frac{e}{5}}$) ; $e^{2\ln(7)}$

Ex3 : Résoudre les équations :

1°) e^{2x} - 2 = 0 2°) (ln(x))² = 1 3°) 2 – 4 ln(x) = ln(x) – 7

4°) ln(2 x – 5) = 3 ln 2 5°) e^x (e^x – 2) = 0 6°) 5e^{2x} – 13e^x = 6

7°) ln(3 – x) = 1 8°) ln(x – 1) + ln(2 – x) = ln(6 x)

9°) ln (4 – x) = -3 10°) 2(ln x)² + 3 ln x – 2 = 0

Ex4 : Résoudre les inéquations :

1°) ln (– 3 x + 2) ≤ ln (3) 2°) ln(5 – 2 x) > 0 3°) ln x (ln x – 2) < 0

4°) 3 (ln x)² + 14 ln x – 5 ≤ 0 5°) ln $\left(\frac{1-x^2}{x-7}\right)$ ≥ 0

Ex5 : Calculer les limites :

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x-3\ln 2}{2\ln x}$ 2°) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{5e^x}$ 3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2(\ln x)^2 - 3\ln x - 2)$

Ex6 : Déterminer les limites aux bornes de l’ensemble de définition :

1°) f(x) = ln x – $\frac{1}{\ln x}$ 2°) f(x) = (2 – $\frac{1}{x}$) ln(x - 1) 3°) f(x) = ln $\left(\frac{2x-6}{5x}\right)$

Ex7 : Résoudre dans ℕ :

1°) $1{,}05^n \leq 2$ 2°) $0{,}95^n > 0{,}1$ 3°) $(\sqrt{2} + 1)^n \geq 100$

Ex8 : Déterminer une primitive de la fonction :

1°) f(x) = $\frac{1}{x}$ - $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sur]0 ; +∞[2°) f(x) = $\frac{2}{3x+7}$ sur [0 ; +∞[

3°) f(x) = $\frac{2}{x-1}$ sur]-∞ ; 1[4°) f(x) = $\frac{e^x}{5e^x+2}$ sur ℝ

Ex9 : Calculer les intégrales :

I= $\int_{-3}^{3} \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ J = $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}dx$ K = $\int_{e}^{2e} \frac{1}{x\ln x}dx$ L = $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}dx$

Ex10 : Etablir le tableau de variations (limites comprises) des fonctions :

1°) f(x) = – x + 4 + 2ln (x) sur] 0 ; +∞ [2°) f(x) = $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ + ln x sur] 0 ; +∞ [

Ex11 : Etablir le tableau de variations (limites comprises) des fonctions sur l’ensemble de définition :

1°) f(x) = (1 – x) ln(1 – x) 2°) f(x) = (ln x)² - ln (x^2)

3°) f(x) = ln $\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{x}{2}$ 4°) f(x) = ln (x + 1) + ln (x – 1) 5°) f(x) = ln (x^2 – 1)

Ex12 : Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par f(x) = ln($e^{2x} - e^x$).

1°) Montrer que pour tout $x > 0$, f(x) = 2 x + ln(1 – e^{-x})

et puis que f(x) = x + ln(e^x – 1).

2°) Utiliser la bonne forme pour calculer :

a) la limite de f en +∞ b) la limite de f en 0

c) le signe de f(x) d) la dérivée de f et le signe de f′(x)

e) la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite D d’équation $y = x$.

Ex13 : *D’après Bac*

1°) Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par f(x) = ln(1 + $\frac{1}{x}$) – x.

a) Déterminer les limites de f en 0 et en +∞.

b) Montrer que f est strictement décroissante sur]0 ; +∞[.

c) Montrer qu’il existe un unique réel α appartenant à]0 ; +∞[tel que f(α) = 0. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2°) Soit g la fonction définie sur]0 ; +∞[par g(x) = ln(1 + $\frac{1}{x}$). La suite (u_n) est définie par u_0 = 1,5 et pour tout n entier naturel $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de g. Construire les 5 premiers termes de la suite (u_n).

b) Le graphique permet-il d’émettre des conjectures sur les variations, la convergence de la suite (u_n) et sur le lien entre (u_n) et α ?

Ex14 : 1°) Soit la fonction g définie sur]0 ; +∞[par g(x) = ln(x + 1) – ln x.

a) Etudier le signe de g(x).

b) Déterminer les limites de g en 0 et en + ∞.

2°) Soit la fonction f définie sur]0 ; +∞[par f(x) = x + 2 + ln(x + 1) – ln x.

Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f (dans un repère orthonormé d’unités 2 cm) par rapport à la droite (D) d’équation $y = x + 2$.

3°) a) Démontrer que la fonction G définie sur]0 ; +∞[par

G(x) = (x + 1) ln(x + 1) – x ln x est une primitive de g.

b) En déduire l’aire, en cm², de la surface délimitée par $\mathscr{C}$, (D) et les droites d’équations x = 1 et x = 3.