

AP : Fonctions EXPONENTIELLE

Ex 1 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} - 2e^x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^3 - 2e^x + 4 = 4$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

on a posé $x = -2x^2 - x + 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 - x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(-2x - 1) + 1 = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - 3e^{2x} - 2) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$
 et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^2 = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 = 1 - 1 = 0^-$
 car si $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x - 1 < 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$x = \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - 1}{3 - e^x} = FI = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}(e^{2x} - \frac{1}{e^x})}{e^x(\frac{3}{e^x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - \frac{1}{e^x}}{\frac{3}{e^x} - 1} = -\infty$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^x} = 0$

Ex 2 1) Pour h^+ réel $x \neq 0$ $\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^x(1 + \frac{1}{e^x})}{e^x(1 - \frac{1}{e^x})} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

2) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{1} = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{-1} = -1$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + 1 = e^0 + 1 = 2$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 1 = 0^+$ car

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$
 et si $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x - 1 > 0$

Ex 3 FAUX 1) $f(x) = \exp(x^2) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x e^{x^2}$

VRAI 2) $g(x) = e^{-x} \Rightarrow g'(x) = -e^{-x}$

FAUX 3) $h(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x} \Rightarrow h'(x) = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x}$

VRAI 4) $k(x) = e^{x^2 - x + 1} \Rightarrow k'(x) = (3x^2 - 1) e^{x^2 - x + 1}$

Ex 4 a) $f(x) = e^{-x}$ $D_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur \mathbb{R} comme composée avec 1 fct exponentielle

$f'(x) = -e^{-x}$

b) $g(x) = e^{2x} - 3e^x + 4$ $D_g = \mathbb{R}$ g dérivable sur \mathbb{R} comme somme et composée avec 1 fct exponentielle

$g'(x) = 2e^{2x} - 3e^x$

c) $h(x) = (x+1)e^x$ $D_h = \mathbb{R}$ h dérivable sur \mathbb{R} comme produit d'1 fct affine $x \mapsto x+1$ et de la fct exponentielle (toutes 2 dérivables sur \mathbb{R})

$h'(x) = 1e^x + (x+1)e^x = e^x(x+2)$

d) $k(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}$ $D_k = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

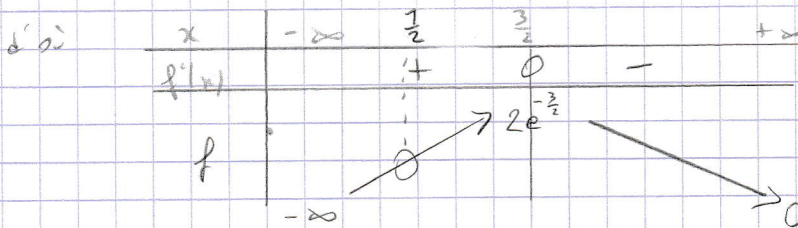
k dérivable sur \mathbb{R}^* comme fct composée.

$k'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

Ex 5 $f(x) = (2x-1)e^{-x}$ $D_f = \mathbb{R}$

1°) (*) f dérivable sur \mathbb{R} comme produit, somme et composée de fct dérivables.

$f'(x) = 2e^{-x} + (2x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(2-2x+1) = e^{-x}(3-2x)$ du signe de $3-2x$ car $e^{-x} > 0$ pour tout x réel



(*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^{-x} = -\infty$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x-1 = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

(*) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1)e^{-x} = \text{FI} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2(-x)-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2xe^x - e^x = 0$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (d'après le cours).

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

(*) $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(2\frac{3}{2}-1\right)e^{-\frac{3}{2}} = 2e^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{e^3}} = \frac{2}{e\sqrt{e}} \approx 0,466$

2°) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0$ car $e^{-x} > 0$ pour tout x réel
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

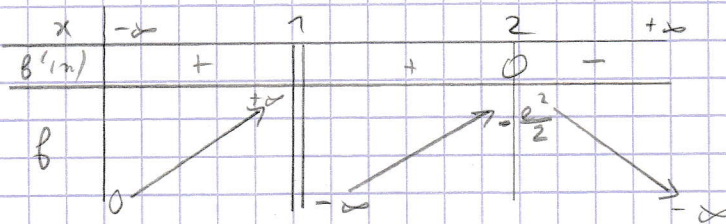
$S = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Ex 6 $f(x) = \frac{e^x}{2(1-x)}$ $D_f = (\mathbb{R} - \{1\})$

10) f dérivable sur $(\mathbb{R} - \{1\})$ comme quotient.

$$f'(x) = \frac{e^x(2-2x) - (-2)(e^x)}{(2-2x)^2} = \frac{e^x(2-2x+2)}{(2-2x)^2} = \frac{e^x(4-2x)}{(2-2x)^2}$$

or $(2-2x)^2 > 0$ et $e^x > 0$ pour $\forall x$ réel, $x \neq 1$ donc $f'(x)$ a m même signe que $4-2x$



\ast $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2-2x} = 0^+$
 car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$
 et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2-2x = +\infty$

\ast $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^x = e$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2-2x = 0^+$

\ast même $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

x	$-$	1	$+$
$2-2x$	$+$	0	$-$

\ast $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2-2x} = \text{FI} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1)}{x(\frac{2}{x}-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{2}{x}-2}$
 $= -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}-2} = -\frac{1}{2}$
 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (d'après le cours)

$f(2) = \frac{e^2}{2(1-2)} = \frac{e^2}{-2} = -\frac{e^2}{2} \approx -3,69$

Ex 7 (A) $f(x) = x + e^x$ $D_f = \mathbb{R}$

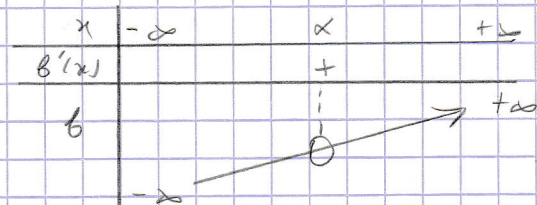
10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et par somme

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par somme avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

20) f dérivable sur \mathbb{R} comme somme

$f'(x) = 1 + e^x > 0$ car $e^x > 0$ pour $\forall x$ réel

Donc f est strict^t croissante sur \mathbb{R} soit



30) Le coefficient directeur de la tangente est $f'(a)$

Il faut donc trouver a t q $f'(a) = 2$

Résolvons $f'(x) = 2$

$$\Leftrightarrow 1 + e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc le point de \mathcal{C} qui a une tangente de coeff dir 2 est le point $A(0; f(0))$ avec $f(0) = 0 + e^0 = 1$.
soit $A(0; 1)$

4°) D'après le tableau de variation du 2°) et le ct.vi:
l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$
 $-0,57 < \alpha < -0,56$

$$(\alpha \approx -0,5671633)$$

On en déduit :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

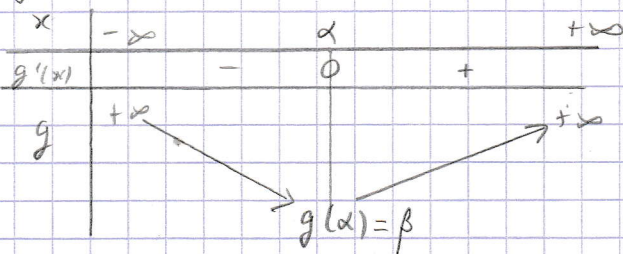
5°) Par ct.vi réel $f(x) - x = x + e^x - x = e^x > 0$

Donc \mathcal{C} est en dessus de \mathcal{D} sur \mathbb{R} .

B $g(x) = x^2 + 2e^x \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}$

1°) g dérivable sur \mathbb{R} comme somme

$$g'(x) = 2x + 2e^x = 2(x + e^x) = 2f(x). \quad \text{Donc } g'(x) \text{ a m\^eme signe que } f(x) \text{ car } 2 > 0$$



$$\beta = g(\alpha) = g(-0,57) \approx 1,456$$

2°) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2e^x = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2e^x = +\infty \quad (\text{comme somme})$$

Ex 8 $f(x) = (ax+b)e^{cx} \quad \mathcal{D} = \left[-2; \frac{2}{3}\right]$

2°) $A(1; 0) \in \mathcal{C} \quad B(0; \frac{1}{3}) \in \mathcal{C}$ et tg \mathcal{C} // à $(0; 1)$ en $x = \frac{2}{3}$ f dérivable sur \mathcal{D}
 \Downarrow $f(1) = 0$ or $f(0) = \frac{1}{3}$ et $f'(\frac{2}{3}) = 0$ Par ct.vi de \mathcal{D}
 \Downarrow $f'(x) = a e^{cx} + c e^{cx}(ax+b)$

$$\Leftrightarrow (a+b)e^1 = 0 \quad b e^0 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow a+b = 0 \quad b = \frac{1}{3}$$

donc $a = -b = -\frac{1}{3}$

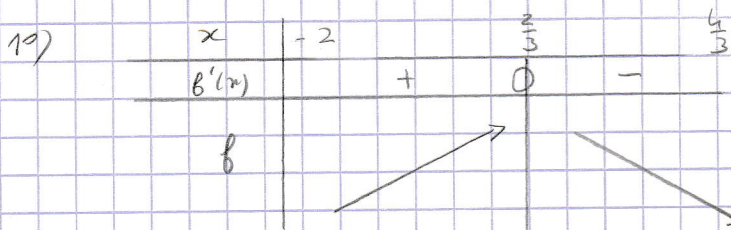
donc $f'(x) = -\frac{1}{3}e^{cx} + ce^{cx}(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3})$
 $= e^{cx}(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(x + \frac{1}{3}c))$

$$4^{\circ}) f'(\frac{2}{3}) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}} \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}c \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}c \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}c + \frac{1}{3}c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = 3$$

donc $f(x) = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) e^{3x}$



En g $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4$ $D_f =]-\infty; +\infty[$

(A) 1^o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^2 = 0$
avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x - 4 = +\infty$

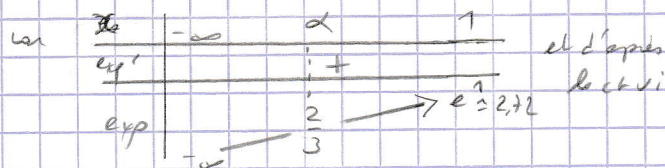
2^o) $g(x) = e^x \left(\frac{3}{2}e^x - 1 \right)$

* $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ ou $\frac{3}{2}e^x - 1 = 0$

\Leftrightarrow pas de sol
car $e^x > 0$ pr $\forall x \in \mathbb{R}$

$e^x = \frac{2}{3}$

qui a une solution unique α sur $]-\infty; +\infty[$

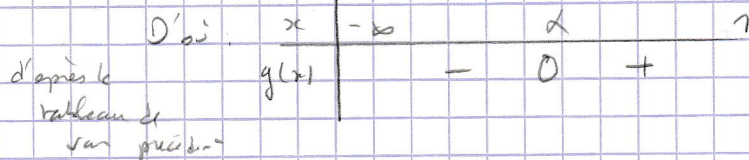


on obtient à la calculatrice: $\alpha \approx -0,61$

($\alpha \approx 0,4054651$)

* $g(x)$ a un signe qui $\frac{3}{2}e^x - 1$ car $e^x > 0$

or $\frac{3}{2}e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{2}{3}$



3^o) a) $f(x) - (-2x - 4) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4 + 2x + 4 = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x = e^x \left(\frac{3}{2}e^x - 1 \right) = g(x)$

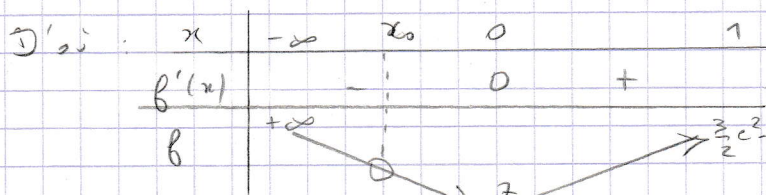
b) Le signe de $g(x) = f(x) - (-2x - 4)$ donne la position de \mathcal{C} par rapport à $D: y = -2x - 4$

4°) f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ comme somme et composée

$$f'(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2 = 3e^{2x} - e^x - 2$$

Pour $\forall x \leq 1$ $(3e^x + 2)(e^x - 1) = 3e^{2x} - 3e^x + 2e^x - 2 = 3e^{2x} - e^x - 2$

Donc pour $\forall x \leq 1$ $f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$ qui est du signe de $e^x - 1$



car $3e^x + 2 > 0$

car $e^x > 0$

car $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0$
 $\Leftrightarrow x \geq 0$

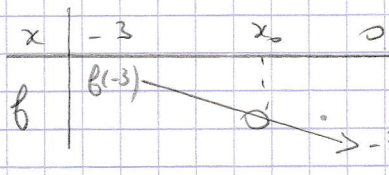
$$f(1) = \frac{3}{2}e^2 - e^1 - 2 - 4 = \frac{3}{2}e^2 - e - 6 \approx 2,365$$

$$f(0) = \frac{3}{2}e^0 - e^0 - 0 - 4 = \frac{3}{2} - 1 - 4 = -\frac{7}{2}$$

5°) On sait : $g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\frac{3}{2}e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{2x} - e^x = 0$

donc $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4 = -2x - 4$ car \nearrow

(B) 1°) Dans $[-3; 0]$



$f(-3) \approx 1,95 > 0$

d'après le th. de Viète

$f(x) = 0$ admet une unique solution

$x_0 \in [-3; 0]$

$x_0 \approx -2,1$

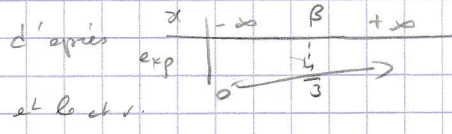
($x_0 = -2,051864$)

2°) a) $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$

On pose $X = e^x$ $3X^2 - X - 2 = 2 \Leftrightarrow 3X^2 - X - 4 = 0$ $\Delta = 49$

$X_1 = -1$ $X_2 = \frac{4}{3}$

donc $e^x = -1$ ou $e^x = \frac{4}{3}$
 pas de sol.



$\beta \approx 0,28768$

et le th. de Viète
 a une unique solution β

b) \mathcal{L} a une tangente de coeff. dir. 2 lorsque $f'(x) = 2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - e^x - 2 = 2$

d'après a) Comme $f'(x) = 2$ a une unique solution β

alors \mathcal{L} a une unique tangente de coeff. dir. 2 au point A

d'abscisse $\beta \approx 0,29$