AP : Fonction EXPONENTIELLE

Ex 1 a) $\lim_{x\to-\infty} e^{3x} - 2e^x + 4 = \lim_{x\to-\infty} (e^x)^3 - 2e^x + 4 = 4$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

b) $\lim_{x\to-\infty} e^{-2x^2-x+1} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$

On a posé $X = -2x^2 - x + 1$ $\quad \lim_{x\to-\infty} -2x^2 - x + 1 = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{-\infty}(\underbrace{-2x-1}_{+\infty}) + 1 = -\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} (e^{-x} - 3e^{2x} - 2) = +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

et $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim_{x\to-\infty} (e^x)^2 = 0$

d) $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$ car $\lim_{x\to0^-} e^x = 1$ et $\lim_{x\to0^-} e^x - 1 = 1 - 1 = 0^-$

car si $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0$
$\Rightarrow e^x - 1 < 0$

e) $\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0$

$X = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x} - 1}{3 - e^x} = FI = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}(e^{2x} - \frac{1}{e^x})}{\cancel{e^x}(\frac{3}{e^x} - 1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{e^{2x} - \frac{1}{e^x}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\frac{3}{e^x} - 1}_{\to-1}} = -\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x\to} \frac{3}{e^x} = 0$

Ex 2 1) Pour tout réel $x \neq 0$ $\quad \underbrace{\frac{e^x + 1}{e^x - 1}}_{\text{Notons } f(x)} = \frac{e^x(1 + \frac{1}{e^x})}{e^x(1 - \frac{1}{e^x})} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

2) a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{1} = 1$ car $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{-1} = -1$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

c) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = +\infty$ car $\lim_{x\to0} e^x + 1 = e^0 + 1 = 2$

et $\lim_{x\to0^+} e^x - 1 = 0^+$ car $\lim_{x\to0^+} e^x = 1$

et si $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0$
$\Rightarrow e^x - 1 > 0$

d) De même $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -\infty$

car $\lim_{x\to0^-} e^x - 1 = 0^-$

Ex 3 FAUX 1) $f(x) = \exp(x^2) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x e^{x^2}$

VRAI 2) $g(x) = e^{-x} \Rightarrow g'(x) = -e^{-x}$

FAUX 3) $h(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x} \Rightarrow h'(x) = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x}$

VRAI 4) $k(x) = e^{x^3 - x + 1} \Rightarrow k'(x) = (3x^2 - 1) e^{x^3 - x + 1}$

Ex 4 a) $f(x) = e^{-x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée avec 1 fct exponentielle

$f'(x) = -e^{-x}$

b) $g(x) = e^{2x} - 3e^{x} + 4$ $\quad D_g = \mathbb{R}$ $\quad$ g dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composé avec 1 fct exponentielle

$g'(x) = 2e^{2x} - 3e^{x}$

c) $h(x) = (x+1)e^{x}$ $\quad D_h = \mathbb{R}$ $\quad$ h dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'1 fct affine $x \mapsto x+$ et de la fct exponentielle (toutes 2 dérivables sur $\mathbb{R}$)

$h'(x) = 1e^{x} + (x+1)e^{x} = e^{x}(x+2)$

d) $h(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}$ $\quad D_h = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme fct composée.

$h'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

Ex 5 $f(x) = (2x-1)e^{-x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

1°) * f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit, somme et composé de fct dérivables.

$f'(x) = 2e^{-x} + (2x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(2 - 2x + 1) = e^{-x}(3-2x)$ du signe de $3-2x$ car $e^{-x} > 0$ pour tout x réel

d'où

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$			+		0	−	
f	$-\infty$	↗	0	↗	$2e^{-\frac{3}{2}}$	↘	0

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1)e^{-x} = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 1 = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ $\quad X = -x$

* et $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{(2x-1)}_{+\infty} \underbrace{e^{-x}}_{0} = FI = \lim\limits_{X \to -\infty} [2(-X) - 1] e^{X} = \lim\limits_{X \to -\infty} -2Xe^{X} - e^{X} = 0$

$X = -x$

car $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0$ (d'après le cours).

et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$

* $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(2\,\frac{3}{2} - 1\right) e^{-\frac{3}{2}} = 2e^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{e^3}} = \frac{2}{e\sqrt{e}} \simeq 0{,}446$

2°) $f(x) \geq 0 \iff (2x-1)e^{-x} \geq 0 \iff 2x - 1 \geq 0$ car $e^{-x} > 0$ pour tt x ré

$\iff x \geq \frac{1}{2}$

$S = \left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

Ex 6 $\quad f(x) = \dfrac{e^x}{2(1-x)} \qquad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

1°) * f dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ comme quotient.

$$f'(x) = \frac{e^x(2-2x) - (-2)(e^x)}{(2-2x)^2} = \frac{e^x(2-2x+2)}{(2-2x)^4} = \frac{e^x(4-2x)}{(2-2x)^2}$$

or $(2-2x)^2 > 0$ et $e^x > 0$ pour tout x réel, $x \neq 1$. Donc $f'(x)$ a même signe que $4-2x$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{e^2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{2-2x} = 0^+$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2-2x = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to1^-} e^x = e$ et $\lim\limits_{x\to1^-} 2-2x = 0^+$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2-2x$		$+$	0	$-$	

* De même $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2-2x} = FI = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x(1)}{x\left(\frac{2}{x}-2\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} \cdot \dfrac{1}{\frac{2}{x}-2}$

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{2}{x}-2} = -\dfrac{1}{2}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (d'après le cours)

$$f(2) = \frac{e^2}{2(1-2)} = \frac{e^2}{-2} = -\frac{e^2}{2} \simeq -3,69$$

Ex 7 (A) $\quad f(x) = x + e^x \qquad D_f = \mathbb{R}$

1°) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et par somme

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par somme avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

2°) f dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme

$f'(x) = 1 + e^x > 0$ car $e^x > 0$ pour tout x réel

Donc f est strict^t croissante sur $\mathbb{R}$ soit

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

3°) Le coefficient directeur de la tangente est $f'(a)$

Il faut donc trouver a t.q. $f'(a) = 2$

Résolvons $f'(x) = 2$

$\iff 1+e^x=2 \iff e^x=1 \iff e^x=e^0 \iff x=0$

Donc le point de $\mathcal{C}$ qui a une tangente de coeff dir 2 est le point $A(0;f(0))$ avec $f(0)=0+e^0=1$

soit $A(0;1)$

4°) D'après le tableau de variation du 2°) et le c.t.v.i l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \simeq -0{,}5671433)$

$-0{,}57<\alpha<-0{,}56$

On en déduit :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5°) Pour tout réel $f(x)-x = x+e^x-x = e^x>0$

Donc $\mathcal{C}$ est au dessus de D sur $\mathbb{R}$.

B $g(x)=x^2+2e^x$ $\quad \mathcal{D}_g=\mathbb{R}$

1°) g dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme

$g'(x)=2x+2e^x=2(x+e^x)=2f(x)$. Donc $g'(x)$ a m̂ signe que $f(x)$ car $2>0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)=\beta$	$\nearrow$	$+\infty$

$\beta=g(\alpha)\simeq g(-0{,}57)\simeq 1{,}456$

2°) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+2e^x=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2e^x=+\infty$ (comme somme)

Ex 8 $f(x)=(ax+b)e^{cx}$ $\quad \mathcal{D}_f=[-2;\frac{4}{3}]$

1°) $A(1;0)\in\mathcal{C}$ $\quad B(0;\frac{1}{3})\in\mathcal{C}$ $\quad$ et tgte // à (Ox) en $x=\frac{2}{3}$

$\Downarrow$ $f(1)=0$ et $f(0)=\frac{1}{3}$ et $f'(\frac{2}{3})=0$

$\iff (a+b)e^1=0$ $\div e$ $\quad be^0=\frac{1}{3}$

$\iff a+b=0$ $\quad b=\frac{1}{3}$

donc $a=-b=-\frac{1}{3}$

f dérivable sur $\mathcal{D}_f$

Pour tt x de $\mathcal{D}_f$

2°) $f'(x)=ae^{cx}+ce^{cx}(ax+b)$

donc $f'(x)=-\frac{1}{3}e^{cx}+ce^{cx}(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})$

$=e^{cx}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(x+\frac{1}{3}c)\right)$

4°) $f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \iff \cancel{e^{c\frac{2}{3}}}\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}c\,\frac{2}{3} + \frac{1}{3}c\right) = 0$

$\iff -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}c + \frac{1}{3}c = 0$

$\iff c = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = 3$

donc $f(x) = \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)e^{3x}$

5°)

x	-2		$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Ex 9 $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4$ $\quad D_f =]-\infty ; 1]$

A 1°) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x)^2 = 0$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x - 4 = +\infty$

2°) $g(x) = e^x\left(\frac{3}{2}e^x - 1\right)$

* $g(x) = 0 \iff \underbrace{e^x = 0}_{\text{pas de sol car } e^x > 0 \text{ pr tt } x \text{ réel}}$ ou $\frac{3}{2}e^x - 1 = 0$

$\iff e^x = \frac{2}{3}$

qui a une solution unique α sur $]-\infty ; 1]$

car

x	$-\infty$		α		1
$\exp'$			$+$		
$\exp$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$e^1 \simeq 2,72$

et d'après le t v i

* on obtient à la calculatrice : $\alpha \simeq -0,41$

$(\alpha \simeq -0,405465$

* $g(x)$ a m̂ signe que $\frac{3}{2}e^x - 1$ car $e^x > 0$

or $\frac{3}{2}e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq \frac{2}{3}$ d'après le tableau de var précédent. D'où

x	$-\infty$		α		1
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3°) a) $f(x) - (-2x-4) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4 + 2x + 4 = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x = e^x\left(\frac{3}{2}e^x - 1\right) = g(x)$

b) Le signe de $g(x) = f(x) - (-2x-4)$ donne la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D} : y = -2x - 4$

4°) f est dérivable sur $]-\infty ; 1]$ comme somme et composée

$f'(x) = \frac{3}{2} 2e^{2x} - e^x - 2 = 3e^{2x} - e^x - 2$

Pour $\forall x \leq 1$ $(3e^x + 2)(e^x - 1) = 3e^{2x} - 3e^x + 2e^x - 2 = 3e^{2x} - e^x - 2$

Donc pour $\forall x \leq 1$ $f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$ qui est du signe de $e^x - 1$

car $3e^x + 2 > 0$

car $e^x > 0$ pour tout x réel

D'où :

x	$-\infty$		x_0		0		1
$f'(x)$		$-$			0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}e^2 - e - 6$

car $e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq e^0$
$\iff x \geq 0$

$f(1) = \frac{3}{2}e^2 - e^1 - 2 - 4$
$= \frac{3}{2}e^2 - e - 6 \simeq 2{,}365$

$f(0) = \frac{3}{2}e^0 - e^0 - 0 - 4 = \frac{3}{2} - 1 - 4$
$= -\frac{7}{2}$

5°) On sait : $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha\left(\frac{3}{2}e^\alpha - 1\right) = 0 \iff \frac{3}{2}e^{2\alpha} - e^\alpha = 0$

donc $f(\alpha) = \frac{3}{2}e^{2\alpha} - e^\alpha - 2\alpha - 4 = -2\alpha - 4$ car

B 1°) Dans $[-3 ; 0]$

x	-3		x_0		0
f	$f(-3)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$

$f(-3) \simeq 1{,}95 > 0$

et d'après le c.t.v.i

$f(x) = 0$ admet une unique solution

$x_0 \in [-3 ; 0]$

$\underline{x_0 \simeq -2{,}1}$

$(x_0 \simeq -2{,}051864)$

2°) a) $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$

On pose $X = e^x$ $3X^2 - X - 2 = 2 \iff 3X^2 - X - 4 = 0$ $\Delta = 49$

$X_1 = -1$ $X_2 = \frac{4}{3}$

donc $\underbrace{e^x = -1}_{\text{pas de sol.}}$ ou $e^x = \frac{4}{3}$

d'après et le c.t.v.i

x	$-\infty$	β	$+\infty$
exp	0	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$

$\beta \simeq 0{,}28768$

a une unique solution β.

b) $\mathcal{C}$ a une tgte de coeff. dir 2 lorsque $f'(x) = 2 \iff 3e^{2x} - e^x - 2 = 2$

d'après a) Comme $f'(x) = 2$ a une unique solution β

alors $\mathcal{C}$ a une unique tangente de coeff. dir 2 au point A

d'abscisse $\beta \simeq 0{,}29$