TS AP : Fonction EXPONENTIELLE

Ex1 : Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{3x} - 2e^{x} + 4)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x^2 - x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} - 3e^{2x} - 2)$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{e^{x} - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} - 1}{3 - e^{x}}$

Ex2 :

1. Démontrer que : pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{e^{x} + 1}{e^{x} - 1} = \dfrac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

2. Utiliser l'écriture la plus adaptée pour calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} + 1}{e^{x} - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x} + 1}{e^{x} - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{x} + 1}{e^{x} - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{x} + 1}{e^{x} - 1}$

Ex3 : Valider ou infirmer les propositions suivantes :

1. $f'(x) = \exp(x^2)$ est la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \exp(x^2)$

2. $g'(x) = -\ e^{-x}$ est la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x}$

3. $h'(x) = -\dfrac{1}{e^{2x}}$ est la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x) = \dfrac{1}{e^{x}}$

4. $k'(x) = (3x^2 - 1)\exp(x^3 - x + 1)$ est la dérivée de la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = e^{x^3 - x + 1}$

Ex4 : Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous en précisant dans chaque cas l'ensemble de validité des calculs.

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $g(x) = e^{2x} - 3e^{x} + 4$

c) $h(x) = (x + 1)e^{x}$

d) $k(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Ex5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$ dont le tableau de variation est donné ci-après.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	a	$\searrow$	0

1. Justifier les renseignements consignés dans le tableau ci-dessus en précisant la valeur de a.

2. Résoudre algébriquement l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Ex6 : Soit f la fonction définie pour tout x appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{x}}{2(1 - x)}.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier les éléments contenus dans le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$		$-$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{e^2}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

2. Tracer C dans $(O\ ; \vec{i}, \vec{j})$.

Ex7 : **A-** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + e^{x}$.
On appelle C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O\ ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

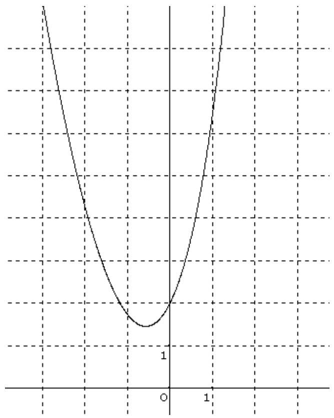
2. Etudier les variations de f.

3. Déterminer les coordonnées du point de C où la tangente T à C a pour coefficient directeur 2.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. Etudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

5. Préciser la position de D d'équation $y = x$ par rapport à C.

B- La courbe Γ ci-dessous représente dans un repère orthonormé la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + 2e^x$.



1. En utilisant ce qui précède, étudier les variations de g.

2. Déterminer les limites de g en +∞ et -∞.

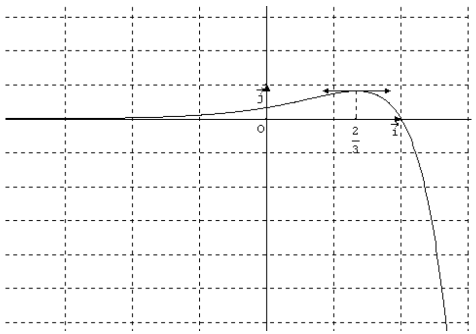
<u>Ex8</u> : Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe C ci-contre représente la fonction f définie sur $\left[-2 , \frac{4}{3}\right]$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{cx},$$

où a, b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer.

On sait que la courbe C contient les points de coordonnées (1 ; 0) et $\left(0 , \frac{1}{3}\right)$ et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{2}{3}$.



1. Par lecture graphique, dresser le tableau de variation de f.

2. Donner $f(0)$, $f(1)$ et $f'\left(\frac{2}{3}\right)$.

3. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

4. Déduire des questions précédentes les réels a, b et c.

<u>Ex9</u> : Soit f la fonction définie sur l'intervalle]-∞ ; 1] par :

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4.$$

On appelle C sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

A- 1. Déterminer la limite de f en -∞.

2. Soit $g(x) = e^x\left(\frac{3}{2}e^x - 1\right)$

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

Donner une valeur approchée de α.

Etudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle]-∞ ; 1].

3. a) Démontrer que $f(x) - (-2x - 4) = g(x)$.

b) Etudier la position de C par rapport à la droite D d'équation $y = -2x - 4$.

4. Calculer $f'(x)$. Démontrer que :

pour tout x de]-∞ ; 1], $f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$.

En déduire le signe de $f'(x)$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. Exprimer $f(\alpha)$ en fonction de α.

B- 1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 dans l'intervalle [-3 ; 0]. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de x_0.

2. a) Résoudre l'équation $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$ en posant $X = e^x$.

b) En déduire qu'il existe un point A unique de C où la tangente a pour coefficient directeur 2.

Tracer la droite D, la courbe C et la tangente à C en A.