AP 1ère ESL

Corrigé Second degré 4

Ex 1 :

1°)

x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-6x^2 - x + 2$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$x + 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Delta = 49$ $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = -\frac{2}{3}$ du signe de a =-6 à l'extérieur des racines

$S =]-\infty ; -2[\cup \left]-\frac{2}{3} ; \frac{1}{2}\right[$

2°) De même on obtient : $S =]-4 ; 1[\cup]2 ; +\infty[$

3°)

x	$-\infty$		-2		$0{,}5$		1		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Q		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\Delta = 1$ $x_1 = 0{,}5$ $x_2 = 1$

$S =]-\infty ; -2[\cup [0{,}5 ; 1]$

4°) De même on obtient : $S =]-\infty ; 2{,}5[$

5°) De même on obtient : $S =]0{,}5 ; 1{,}5[\cup]4 ; +\infty[$

Ex 2 :

1°) $B(x) = -10x^2 + 900x - 2610$ pour $x \in [3 ; 100]$.

$a = -10$ $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-900}{2(-10)} = 45$ $\beta = B(\alpha) = B(45) = -10 \times 45^2 + 900 \times 45 - 2610 = 17\,640$

Donc $B(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = -10(x-45)^2 + 17\,640$

2°)

x	3		87		100
$B(x)$	0	$+$	0	$-$	

$\Delta = 705\,600$ $x_1 = 87$ $x_2 = 3$ du signe de a =-10 à l'extérieur des racines

3°) L'entreprise réalise des bénéfices lorsque $B(x) > 0$, donc quand $x \in]3 ; 87[$ en centaines, d'après 2°).
Donc l'entreprise réalise des bénéfices quand elle fabrique et vend entre 3 et 87 centaines, soit entre 300 et 8700 boîtes de jeux.

4°) D'après 1°) , on a : $a = -10$ 10 $\alpha = 45$ $\beta = 17\,640$

x	3		45		100
$B(x)$	0	$\nearrow$	17 640	$\searrow$	-12 610

Car $a < 0$

Donc l'entreprise réalise son bénéfice maximal pour 45centaines = 4500 boîtes de jeux fabriquées et ce bénéfice maximal vaut 17 640€

Ex 3 : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1°) $\Delta = 4$ $x_1 = 1$ $x_2 = 3$ Donc $S = \{1 ; 3\}$

2°) $a = 1 > 0$ $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ $\beta = f(\alpha) = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

3°) C_f coupe l'axe des ordonnées en un point A de coordonnées A(0 ; f(0)), soit en A(0 ; 3).

Ex 4 : $f(x) = x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = 4 - x^2$

1°) On résout $f(x) = g(x)$ soit $x^2 + 3x - 1 = 4 - x^2$ soit $2x^2 + 3x - 5 = 0$ $\Delta = 49$ $x_1 = -2,5$ $x_2 = 1$

Et $g(-2,5) = 4 - (-2,5)^2 = -2,25$ $g(1) = 4 - 1^2 = 3$

Donc Cf et Cg se coupent en 2 points de coordonnées (-2,5 ; -2,25) et (1 ; 3).

2°) On étudie le signe de $f(x) - g(x) = x^2 + 3x - 1 - (4 - x^2) = x^2 + 3x - 1 - 4 + x^2) = 2x^2 + 3x - 5$

D'après 1°) :

x	$-\infty$		-2,5		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		+	0	-	0	+	

$\Delta = 49$ $x_1 = -2,5$ $x_2 = 1$ du signe de a =2 à l'extérieur des racines

Donc sur $]-\infty ; -2,5[$ et sur $]1 ; +\infty[$ $f(x) - g(x) > 0$ donc $f(x) > g(x)$ donc C_f est au-dessus de C_g.

Et sur $]-2,5 ; 1[$ C_f est en-dessous de C_g.

Ex 5 :1°) Les coûts de fabrication sont égaux à 1610€ quand $C(q) = 1610$ soit $0,1\,q^2 + 10\,q + 1500 = 1610$

donc $0,1\,q^2 + 10\,q - 110 = 0$ $\Delta = 144$ $x_1 = -110 < 0$ $x_2 = 10$

Donc les coûts sont de 1610€ pour 10 objets fabriqués.

2°) a) Pour 50 objets fabriqués et vendus : Coûts : $C(50) = 0,1 \times 50^2 + 10 \times 50 + 1500 = 2250$€

Recette : $87 \times 50 = 4350$€

Bénéfice = Recette – coût = 4350 – 2250 = 2100€

Pour 100 objets fabriqués et vendus : Coûts : $C(100) = 0,1 \times 100^2 + 10 \times 100 + 1500 = 3500$€

Recette : $87 \times 100 = 8700$€

Bénéfice = Recette – coût = 8700 – 3500 = 5200€

b) Le bénéfice = $B(q)$ = Recette – coûts = $87 \times q - C(q) = 87\,q - (0,1\,q^2 + 10\,q + 1500) = 87\,q - 0,1\,q^2 - 10\,q - 1500$

$B(q) = -0,1\,q^2 + 77\,q - 1500$

c) $B(q) = 0$ quand $-0,1\,q^2 + 77\,q - 1500 = 0$ $\Delta = 5329$ $x_1 = 750$ $x_2 = 20$

Donc le bénéfice est nul pour 20 objets et 750 objets fabriqués et vendus.

Ex 6 : gain mensuel en € : $G(n) = -3,3\,n^2 + 39,6\,n + 87$ en fonction de n (en mois, avec n=1 pour janvier)

1°) On détermine le tableau de variation de la fonction G :

$a = -3,3 < 0$ $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-39,6}{2(-3,3)} = 6$ $\beta = f(\alpha) = f(6) = -3,3 \times 6^2 + 39,6 \times 6 + 87 = 205,8$

x	0	6	$+\infty$
B(x)	87	205,8	

C'est pour n = 6 que le gain est maximal, c'est donc en juin que le gain sera maximal et sera égal à 205,8€.

2°) On résout $G(n) \geq 155$ soit $-3,3\,n^2 + 39,6\,n + 87 \geq 155$ soit $-3,3\,n^2 + 39,6\,n - 68 \geq 0$

$\Delta = 670,56$ $x_1 \simeq 9,9$ $x_2 = 2,1$

n	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$G(n)$		-	0	+	0	-	

Donc $G(n) \geq 155$ pour $n \in [x_1 ; x_2]$, donc entre 3 (compris) et 9 (compris).