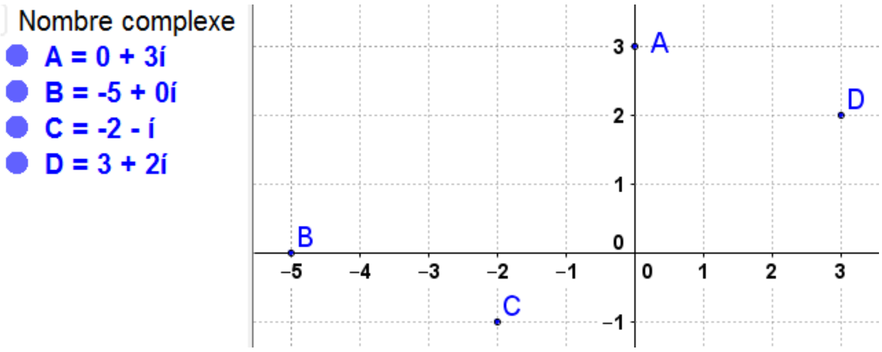
AP TS

Corrigé :Complexes2

Ex1 : 1°) graphique



2°) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -5 - 3i$

$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = -2 - i - (2i + 3)$
$= -5 - 3i$

Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Donc ABCD est un parallélogramme.

Ex2 : 1°) $z^2 - 2z + 26 = 0$

$\Delta = -100 < 0$, donc 2 solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{2-i\sqrt{100}}{2} = 1 - 5i$ $z_2 = \overline{z_1} = 1 + 5i$ $S = \{1 - 5i ; 1 + 5i\}$

2°) $-2z^2 + z + 1 = 0$ $\Delta = 9 > 0$, donc 2 solutions réelles $z_1 = 1$ et $z_2 = -\frac{1}{2}$ $S = \{-\frac{1}{2} ; 1\}$

3°) $(z - i)^2 = 4 \Leftrightarrow z - i = 2$ ou $z - i = -2 \Leftrightarrow z = 2 + i$ ou $z = -2 + i$ $S = \{2 + i ; -2 + i\}$

Ex3 : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

1°) $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = -1 - 3 - 3 + 7 = 0$

2°) Pour tout z complexe $(z + 1)(z^2 - 4z + 7) = z^3 - 4z^2 + 7z + z^2 - 4z + 7 = z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = P(z)$

3°) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \Leftrightarrow z + 1 = 0$ ou $z^2 - 4z + 7 = 0$

$z = -1$ $\Delta = -12 < 0$ $z_1 = \frac{4-i\sqrt{12}}{2} = \frac{4-2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3}$

$z_2 = \overline{z_1} = 2 + i\sqrt{3}$

$S = \{-1 ; 2 - i\sqrt{3} ; 2 + i\sqrt{3}\}$

Ex4 : $M(z) \longrightarrow M'(z')$ où $z' = \frac{z-2+i}{z+i}$ avec $z \neq -i$

1°) $z_{A'} = \frac{z_A-2+i}{z_A+i} = \frac{3i-2+i}{3i+i} = \frac{-2+4i}{4i}\frac{i}{i} = \frac{-2i-4}{-4} = 1 + \frac{1}{2}i$ Donc $A'(1 + \frac{1}{2}i)$

2°) On résout: pour tout $z \neq -i$ $Z = 2i \Leftrightarrow \frac{z-2+i}{z+i} = 2i \Leftrightarrow z - 2 + i = 2i(z + i) \Leftrightarrow z - 2 + i = 2iz - 2$

$\Leftrightarrow z(1 - 2i) = 2 - i - 2 \Leftrightarrow z = \frac{-i}{1-2i}\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{2-i}{1^2+2^2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ Donc $B(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i)$

3°) Pour tout $z \neq -i$ on pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

$$z' = \frac{z-2+i}{z+i} = \frac{x+iy-2+i}{x+iy+i} = \frac{x-2+i(y+1)}{x+i(y+1)}\frac{x-i(y+1)}{x-i(y+1)} = \frac{x^2+ixy-2x+ix-ixy+y^2+2iy+y-ix+y+2i+1}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x+2y+1+i(2y+2)}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y^2-2x+2y+1}{x^2+(y+1)^2} + i\,\frac{2y+2}{x^2+(y+1)^2}$$

4°) a) $M(z) \in E \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z') = 0 \Leftrightarrow \frac{2y+2}{x^2+(y+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2 = 0 \\ x^2 + (y + 1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = -1 \\ (x; y) \neq (0; -1) \end{cases} \longrightarrow$ équation d'une droite qu'on nomme D

Or le point G d'affixe –i est sur D.

Donc l'ensemble E des points M(z) tels que z' soit réel est la droite d'équation $y = -1$, privé du point G(-i).

5°) M(z) ∈ F ⇔ z' imaginaire pur ⇔ Re(z') = 0 ⇔ = $\frac{x^2+y^2-2x+2y+1}{x^2+(y+1)^2}$ = 0 ⇔

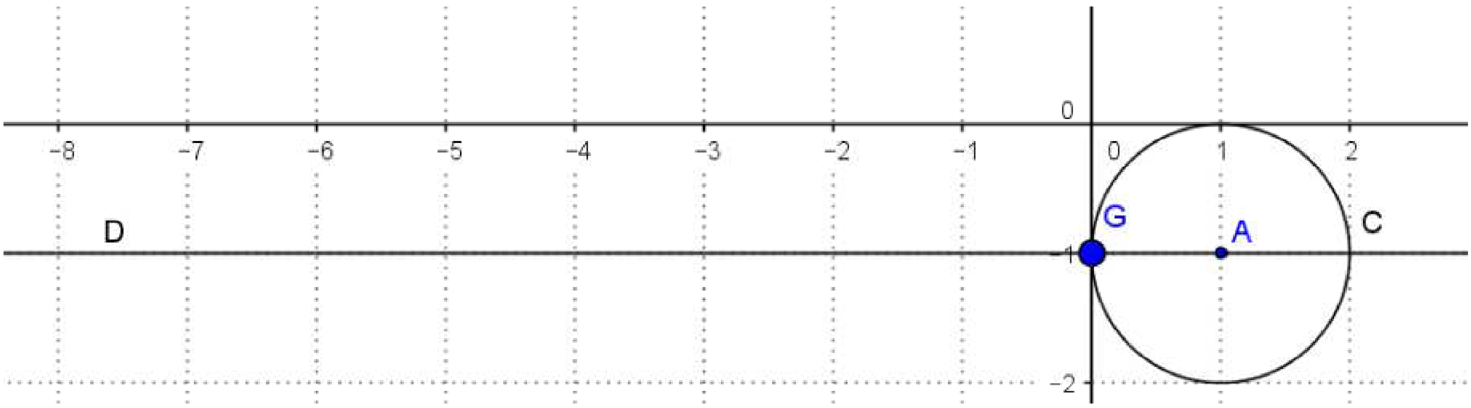
$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y+1=0 \\ x^2+(y+1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2-1+(y+1)^2-1+1=0 \\ (x\,;y) \neq (0;-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=1 \\ (x\,;y) \neq (0;-1) \end{cases}$$ → équation d'un cercle que l'on nomme C

Or le point G d'affixe –i est sur le cercle C car si x = 0 et y = -1 alors $(x-1)^2+(y+1)^2$ = 1 + 0 = 1

Donc l'ensemble F des points M(z) tels que z' soit imaginaire pur est le cerle de centre I(1 – i) et de rayon 1, privé du point G(-i).

5°)



Ex2 : Il s'agit de savoir reconnaître les équations de cercles et de droites, en particulier.

1°) $x^2 + y^2 - 3x - 2y = 1$ est l'équation d'un cercle.
L'équation est équivalente à $(x - 1{,}5)^2 - 1{,}5^2 + (y - 1)^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow (x - 1{,}5)^2 + (y - 1)^2 = \frac{17}{4}$
$\Leftrightarrow (x - 1{,}5)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{\frac{17}{4}}^2$

Donc c'est l'équation du cercle de centre I(5 ; 1) et de rayon $\sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

2°) $-4xy + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4x} \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}\frac{1}{x}$. Donc c'est l'équation d'une hyperbole.

3°) $2x + 3y - 4 = 2 \Leftrightarrow y = \frac{-2x+4+2}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$. C'est l'équation d'une droite.

4°) $2x^2 + 2y^2 + 5y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2} = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} = 0 \quad x^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$
Donc c'est l'équation du cercle de centre I(0 ; $-\frac{5}{4}$) et de rayon $\frac{7}{4}$

5°) $2x^2 - 2y + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow y = x^2 + 2{,}5x - 1{,}5$. Donc c'est l'équation d'une parabole.

6°) $2x^2 - 2y^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 = 2x^2 + 5x - 3 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + 2{,}5x - 1{,}5$ Ce n'est pas l'équation d'un ensemble « simple »

7°) $x^2 + y^2 + 5x + 10y - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 2{,}5)^2 - 2{,}5^2 + (y + 5)^2 - 5^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 2{,}5)^2 + (y + 5)^2 = 34{,}25$

Donc c'est l'équation du cercle de centre I(-2,5 ; -5) et de rayon $\sqrt{34{,}25}$

<u>Ex3</u> : On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z = (2z – i) + (3iz – 4).

1°) z est un réel, donc z = x où x est réel.
Z = $(2x - i) + (3ix - 4) = 2x - 4 + i(3x - 1)$ qui est la forme algébrique de Z.
Z réel $\Leftrightarrow$ Im(Z) = 0 $\Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$
Donc Z est réel pour z réel z = $\frac{1}{3}$

2°) Point A' image du point A(2 – i) : $z_{A'} = (2z_A - i) + (3iz_A - 4) = 2(2 - i) - i + 3i(2 - i) - 4$
$z_{A'} = 4 - 2i - i + 6i - 3i^2 - 4 = 3 + 3i$. Donc l'image de A estA'(3 + 3 i)

3°) Point(s) dont l'image est B'(i) : on résout (2z – i) + (3iz – 4) = i $\Leftrightarrow$ 2 z + 3 i z = i + 4 + i
$z(2 + 3i) = 4 + 2i \Leftrightarrow z = \frac{4+2i}{2+3i} = \frac{4+2i}{2+3i}\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{8-12i+4i-6i^2}{2^2+3^2} = \frac{14-8i}{13} = \frac{14}{13} - \frac{8}{13}i.$

Donc l'antécédent de B'(i) est B($\frac{14}{13} - \frac{8}{13}i$).

4°) Ensemble des points invariants : on résout Z = z $\Leftrightarrow$ (2z – i) + (3iz – 4) = z

$\Leftrightarrow 2z - i + 3iz - 4 = z \Leftrightarrow z + 3iz = 4 + i \Leftrightarrow z(1 + 3i) = 4 + i \Leftrightarrow z = \frac{4+i}{1+3i}\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{4-12i+i-3i^2}{1^2+3^2} = \frac{7}{10} - \frac{11}{10}i.$

Le point invariant est I($\frac{7}{10} - \frac{11}{10}i$)

5°)Forme algébrique de Z : on pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

$Z = 2(x + iy) - i + 3i(x + iy) - 4 = 2x + 2iy - i + 3ix - 3y - 4 = 2x - 3y - 4 + i(3x + 2y - 1)$

6°) a) Ensemble des points M(z) tels que Z soit un réel :

$Z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(Z) = 0 \iff 3x + 2y - 1 = 0 \iff y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

L'ensemble des points M(z) tels que Z réel est la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

b) De même on trouve que l'ensemble des points M(z) tels que Z soit un imaginaire pur est la droite d'équation $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

<u>Ex4</u> : Résoudre les équations et représenter les solutions dans le plan complexe :

1°) $2iz - 4 = 5i + 4z$ On isole z

$\iff (-4 + 2i)z = 4 + 5i \iff z = \frac{4+5i}{-4+2i}\ \frac{-4-2i}{-4-2i} = \frac{-16-8i-20i-10i^2}{(-4)^2+2^2} = -\frac{3}{10} - \frac{7}{5}i.$ $S = \left\{-\frac{3}{10} - \frac{7}{5}i\right\}$

2°) $2i\overline{z} - 4 = 5i + 4\overline{z}$ On isole $\overline{z}$

$(-4 + 2i)\,\overline{z} = 4 + 5i \iff \overline{z} = \frac{4+5i}{-4+2i}\ \frac{-4-2i}{-4-2i} = -\frac{3}{10} - \frac{7}{5}i$ d'après 1°) Donc $z = -\frac{3}{10} + \frac{7}{5}i$ $S = \left\{-\frac{3}{10} + \frac{7}{5}i\right\}$

3°) $2iz - 4 = 5i + 4\overline{z}$ on pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

$\iff 2i(x + iy) - 4 = 5i + 4(x - iy) \iff 2ix - 2y - 4 = 5i + 4x - 4iy \iff -2y - 4 + i(2x) = 4x + i(5 - 4y)$

$\iff \begin{cases} -2y - 4 = 4x \\ 2x = 5 - 4y \end{cases}$ en utilisant la propriété: deux complexes sont égaux ssi ils même partie réelle et même partie imaginaire.

$\iff \begin{cases} 4x = -2y - 4 \\ 2x = 5 - 4y \end{cases}$ On multiplie la 2è ligne par 2 puis on soustrait: $\iff \begin{cases} 4x = -2y - 4 \\ 4x = 10 - 8y \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 0 = -2y - 4 - 10 + 8y \\ 2x = 5 - 4y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{7}{3} \\ 2x = 5 - 4\frac{7}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{7}{3} \\ x = \frac{1}{2}(5 - 4\frac{7}{3}) = -\frac{13}{6} \end{cases}$

Donc $z = -\frac{13}{6} + \frac{7}{3}i$ $S = \left\{-\frac{13}{6} + \frac{7}{3}i\right\}$